BEITRAG ZUR THEORIE DER SEITENREFRAKTION

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

VON

GUSTAV FÖRSTER

AUS MICHELSDORF, KREIS WALDENBURG
OBSERVATOR AM GEODÄTISCHEN INSTITUT IN POTSDAM

MIT 12 FIGUREN IM TEXT

Tag der Promotion: 28. September 1911.

10

Referenten: Professor Dr. Helmert,
Professor Dr. Struve.

LEIPZIG
WILHELM ENGELMANN
1911

SEINEM HOCHVEREHRTEN GÖNNER

HERRN GEHEIMEN REGIERUNGSRAT
PROFESSOR DR. HELMERT

IN DANKBARER VEREHRUNG.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535712_0193

Inhaltsangabe.

§ 1. Feststellung der Refraktionsgrösse 1
§ 2. Die Gestalt der Lichtkurve und die Refraktionsverbesserung . . 5
§ 3. Zusammenhang des Refraktionsvektors mit Temperatur und Barometerstand 7
§ 4. Das homogene Refraktionsfeld 9
§ 5. Beispiel zum homogenen Refraktionsfelde 16
§ 6. Grosse, nicht homogene Refraktionsfelder 17
§ 7. Das Refraktionspotential 28
§ 8. Zusammenfassung der Ergebnisse 29
§ 9. Beispiel eines grossen Refraktionsfeldes 30
§ 10. Kleine Refraktionsfelder 33
§ 11. Entstehung und Existenz von Refraktionsfeldern 34
§ 12. Refraktionsstreuung 40
§ 13. Weitere Aufgaben der Refraktionstheorie 41
§ 14. Nachweis der Seitenrefraktion in einzelnen Richtungsmessungen und in trigonometrischen Netzen 42
§ 15. Kritische Betrachtungen über einige bisherige Arbeiten 52

Druck der Königl. Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G., Würzburg.

§ 1. Feststellung der Refraktionsgrösse.

In den Theorien der Höhenrefraktion wird angenommen, dass die Luft sich immer in gleicher Weise schichtet, d. h. dass die Flächen gleicher Luftdichte ihre Gestalt und Lage beibehalten, obwohl die Luftdichte selbst sich zeitlich ändern mag. Gewöhnlich setzt man voraus, dass diese angenommenen Flächen gleicher Luftdichte, die im folgenden kurz „Normalflächen" genannt werden sollen, konzentrische Kugelschalen um die feste (als Kugel betrachtete) Erde bilden. Unter diesen Voraussetzungen ist der Einfluss der Refraktion auf einen Höhenwinkel durch einen einzigen, vom Orte eindeutig abhängigen Parameter (der gewöhnlich $\varkappa$ genannt wird) festgelegt. Eine Änderung der Richtung des Dichtegefälles, oder was damit gleichwertig ist, eine Verbeulung der Normalflächen (wenn dieser, der Technik entlehnte Ausdruck gebraucht werden darf) lässt sich durch einen solchen Parameter aber nicht beschreiben. Es soll versucht werden, diese Änderungen der Flächen gleicher Luftdichte (die gewöhnlich klein sein werden) dadurch zu berücksichtigen, dass dem Parameter $\varkappa$ (d. i. dem Refraktionskoeffizienten der Höhenrefraktion) ein kleines Glied $\mathfrak{R}$ in passender Weise beigeordnet wird. Die Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ sind noch genauer festzustellen.

Nimmt man als „Normalflächen" die Flächen gleichen Schwerepotentials, so werden die Abweichungen der tatsächlichen Flächen gleicher Luftdichte von diesen Normalflächen auch eine Refraktion in horizontalem Sinne hervorbringen können. Eine kleine Seitenrefraktion gibt die um das Erdellipsoid regelmässig geschichtete Luft zwar auch, was Sonderhof, Helmert und Pizzetti nachgewiesen haben, doch kann dieser Beitrag zur Brechung des

horizontalen Lichtstrahles ausser acht gelassen werden, weil er eine messbare Grösse nicht erreicht. Man darf also sagen, dass die Konstante $\varkappa$ in der Seitenrefraktion bedeutungslos ist, und dass das Glied $\mathfrak{R}$, das bei Höhenrefraktionen nur als Zusatzglied zu $\varkappa$ erscheint und in der Regel neben diesem Wert vernachlässigt werden kann, in der Seitenrefraktion allein und selbständig auftritt.

Auf einer Normalfläche kann man sich die Kurven gleicher Luftdichte (nach Beobachtungen) dargestellt denken. Dann wird im Bereich eines hinreichend kleinen Flächenstückes die Luftdichte linear nach einer bestimmten Richtung hin abnehmen. Die Grösse dieser Abnahme (in irgend einer Masseinheit gemessen) sei l. Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y so, dass die + x-Achse mit der Richtung des Dichtegradienten den Winkel α und die + y-Achse entsprechend den Winkel $90^0 - \alpha$ einschliesst, so lässt sich das totale Dichtegefälle der Luft auch ersetzen durch zwei Komponenten: durch die Dichteabnahme $l \cos \alpha$ in der + x-Richtung und $+ l \sin \alpha$ in der + y-Richtung. Auf einen Lichtstrahl, der im Koordinatennullpunkt von der x-Achse tangiert wird, bleibt die + x-Komponente $l \cos \alpha$ (innerhalb eines hinreichend kleinen Flächenstückes) ohne Einfluss; das Dichtegefälle $+ l \sin \alpha$ in der Richtung senkrecht zum Lichtwege dagegen krümmt diesen in einer Grösse, die durch $l c \sin \alpha$ dargestellt werden kann und den gesamten Refraktionseinfluss auf eine Visur in der Richtung + x ausmacht. Die vom Ort abhängige Grösse l c reicht also allein nicht zu, um die Seitenrefraktion mathematisch darzustellen; man muss vielmehr noch eine Richtung α, d. h. die Richtung des grössten Dichtegefälles der Luft hinzunehmen. Daraus folgt: Die Seitenrefraktion hängt von einem Vektor ab.

Zu den Normalflächen kann man sich zwei Scharen von orthogonalen Flächen denken und für jede derartige Fläche dieselben Betrachtungen anstellen. Von der wahren Luftdichte ist aber vorher diejenige abzuziehen, die durch die Normalflächen angegeben wird. An die Stellen der Kurven gleicher Luftdichte treten die Kurven gleichen Überschusses über die den Normalflächen entsprechenden mittleren oder angenommenen jeweiligen Luftdichten. Legt man alsdann ein dreiachsiges rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z so, dass (innerhalb eines hinreichend kleinen Bereichs) die Koordinatenachsen mit Schnittlinien der Flächen zusammenfallen und die z-Achse lotrecht steht, so kann man in der Richtung der drei Achsen

die Vektorkomponenten mit $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$ bezeichnen. Die Zusammensetzung dieser drei Komponenten liefert den gesamten Refraktionsvektor $\mathfrak{R}$, der das oben unbestimmt gelassene Zusatzglied zu $\varkappa$ bildet.

Es könnte wohl $\varkappa$ in $\mathfrak{R}_z$ mit einbegriffen werden, und man hätte es dann in der Höhenrefraktion auch nur mit einem Vektor $\mathfrak{R}$ zu tun; da aber $\varkappa$ im Vergleich zu $\mathfrak{R}_z$ gross ist, so würde man einen Vektor erhalten, der ganz von $\varkappa$ beherrscht würde und immer nahezu senkrechte Richtung hätte, was Unzuträglichkeiten in der Rechnung zur Folge haben könnte und die Anschaulichkeit, die dem Vektor $\mathfrak{R}$ innewohnt, zum Teil wieder aufheben würde.

Das Luftdichtegefälle wird nun zwar immer die Hauptursache der Refraktion sein, es ist aber vielleicht nützlich, die Dichteänderung der Luft nur als ein Mittel zu betrachten, das zur Kennzeichnung der Grösse $\mathfrak{R}$ als Vektor geführt hat, und im folgenden den Refraktionsvektor $\mathfrak{R}$ allgemein einzuführen ohne Rücksicht auf die besondere Eigenschaft (als polarer Vektor), die ihm durch diese Art der Herleitung scheinbar zukommt.

Für die Theorie der seitlichen Strahlenbrechung, die hier behandelt werden soll, ist die Komponente $\mathfrak{R}_z$ bedeutungslos. Auch die Konstante $\varkappa$ bewirkt, wie schon erwähnt, keine messbare Seitenrefraktion. Es soll deshalb der Einfachheit halber die Bezeichnung Refraktionsvektor $\mathfrak{R}$ dahin eingeschränkt werden, dass $\mathfrak{R}$ sich immer nur aus den horizontalen Komponenten $\mathfrak{R}_x$ und $\mathfrak{R}_y$ zusammensetzt. Ein Grund zur Abtrennung der Seitenrefraktion von der Gesamtrefraktion ist wesentlich auch durch die Anordnung der Horizontalwinkel zu trigonometrischen Netzen gegeben, eine Anordnung, die bei Höhenwinkeln nicht stattfindet. Es erweisen sich deshalb auch für horizontale Winkel manche Formeln als nötig, die für Höhenwinkel keinen Sinn haben, z. B. diejenige, welche die Änderung des Schlussfehlers einer Seitenbedingungsgleichung als Folge der Refraktion darstellt. In Spezialfällen (die nicht direkt zur Seitenrefraktion gehören), wo es nötig ist, die Komponente $\mathfrak{R}_z$ hinzuzunehmen, oder wo es zweckmässig ist, die Theorie der Höhenrefraktion in der vorgeschlagenen Art durch den Vektor $\mathfrak{R}$ zu ergänzen, kann man, wenn irgend ein für die Komponenten $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$ ermittelter Satz für eine Vertikalebene, etwa die x z-Ebene, notwendig wird, diese Modifikation des Satzes einfach dadurch finden, dass der Index y überall in z verwandelt wird. Ein solcher Spezialfall liegt z. B. vor, wenn der Einfluss der Refraktion auf die Polhöhenmessungen nach der Horre-

bow-Talkott-Methode untersucht werden soll: die durch $\varkappa$ bedingten Höhenrefraktionen fallen bei dieser Messungsmethode heraus, dagegen kann der Vektor $\mathfrak{R}$ mit allen drei Komponenten in Anbetracht der grossen Genauigkeit dieses Messverfahrens sehr wohl von Belang sein. Auch das Nivellement mit Niveau stellt einen solchen Spezialfall dar. Hier hat überhaupt nur die Komponente $\mathfrak{R}_z$ einen Einfluss, während die Konstante $\varkappa$ und die Horizontalkomponenten $\mathfrak{R}_x$ und $\mathfrak{R}_y$ bedeutungslos sind (unter der Voraussetzung, dass aus der Mitte nivelliert wird und die Visuren sehr nahe horizontal sind).

Man kann den Refraktionsvektor $\mathfrak{R}$ (also von jetzt ab immer nur mit Beschränkung auf horizontale Komponenten, soweit nichts anderes gesagt wird) auch in zwei Komponenten $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ so zerlegen, dass $\mathfrak{R}_2$ in die Richtung φ eines näher betrachteten Lichtstrahles fällt, während $\mathfrak{R}_1$ senkrecht darauf steht und die Richtung $\varphi + 90^0$ hat. Die Masseinheit des Vektors soll nun so gewählt werden, dass $|\mathfrak{R}_1|$ das 10^{10}fache des in Metern ausgedrückten, reziprok genommenen Krümmungsradius' der Lichtkurve wird. Die positive Richtung des Vektors $\mathfrak{R}$ soll dadurch gekennzeichnet sein, dass sie mit der nach dem Krümmungsmittelpunkt der Lichtkurve gehenden Richtung einen spitzen Winkel einschliesst.

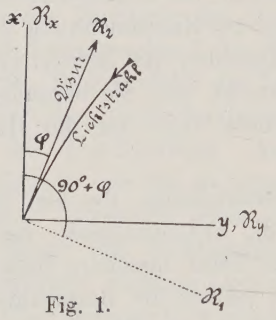

Fig. 1.

Dieses Mass (das man vorkommendenfalls auch für die Komponente $\mathfrak{R}_z$ beibehält) lässt sich mit dem der Refraktionskonstanten $\varkappa$ in Beziehung bringen, wenn man beachtet, dass $\varkappa$ das Verhältnis

$$\frac{\text{Krümmung des Lichtstrahles einer Höhenvisur von } 90^0 \text{ Zenitdistanz}}{\text{Erdkrümmung}}$$

darstellt. Da der mittlere Erdradius 6370000 m beträgt, so muss $\varkappa$ mit $\frac{10^{10}}{6370000} = 1570$ multipliziert werden, um diese Grösse in Masseinheiten von $|\mathfrak{R}|$ auszudrücken.

Mit Hilfe des Refraktionsvektors wird es möglich sein, die vier naheliegenden Hauptfragen zu beantworten, die der Theorie der Seitenrefraktion gestellt werden:

Welchen Einfluss hat die Seitenrefraktion

1. auf eine trigonometrische Richtung,

2. auf die Winkelbedingungsgleichungen eines trigonometrischen Netzes,
3. auf die Seitenbedingungsgleichungen eines trigonometrischen Netzes,
4. auf die Gestalt des Netzes als Ganzes?

§ 2. Die Gestalt der Lichtkurve und die Refraktionsverbesserung.

Berechnet man die Koordinaten, Richtungen usw. eines trigonometrischen Netzes nach ein und derselben Rechnungsvorschrift einmal aus den direkt gemessenen Richtungen φ_{12}, φ_{13} . . . und ein andermal aus den von Refraktionsfehlern befreiten Richtungen $\varphi_{12} + \delta\varphi_{12}$, $\varphi_{13} + \delta\varphi_{13}$ . . ., so mögen sich etwa ergeben:

für das mit Refraktion behaftete Netz die Punkte P_1, P_2 . . . mit den Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2, und den Richtungen $\bar{\varphi}_{12}$ von P_1 nach P_2 bezw. den hiernach orientierten Messungsergebnissen φ_{12}, φ_{13} . . . ,

für das von Refraktion befreite Netz die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ . . . mit den Koordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$ . . . und den Richtungen $\varphi_{12} + \delta\varphi_{12}$ von $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{P}_2$ usf.

Von Messungsfehlern soll der Einfachheit halber abgesehen werden. $\delta\varphi$ stellt die Verbesserung dar, die einer Richtungsmessung hinzuzufügen ist, um sie von Refraktion zu befreien, und soll demgemäss im folgenden mit „Refraktionsverbesserung“ bezeichnet werden. Sie zerfällt in zwei Teile, wie sich sogleich zeigen wird. Man kann sich vorstellen, dass die Wege, welche die Lichtstrahlen zwischen den trigonometrischen Punkten gegangen sind, im fehlerfreien System $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ abgebildet seien. Bezeichnet man dann die Richtungen der geometrischen Tangenten, die in einem Punkte $\mathfrak{P}_1$ an die Lichtkurven gelegt werden können, mit $\bar{\bar{\varphi}}_{12}$, $\bar{\bar{\varphi}}_{13}$ . . . , so sind diese Richtungen offenbar gleich den im System x, y orientierten und um eine kleine Orientierungsgrösse ψ_1 verbesserten Messungsergebnissen φ_{12}, φ_{13} . . . . Den Lichtweg selbst kann man

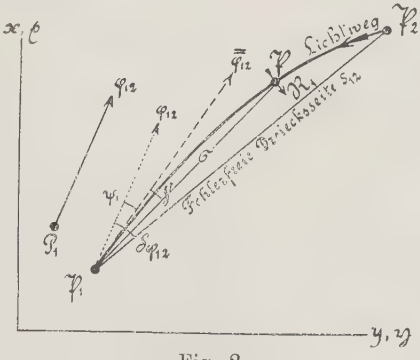

Fig. 2.

als Funktion von Polarkoordinaten σ, γ darstellen. Figur 2 möge den Zusammenhang der verschiedenen Grössen erläutern.

Nun lässt sich die Krümmung eines Lichtstrahles ausdrücken durch $\frac{\Re_1}{10^{10}}$, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, und auch mit Hilfe der Koordinaten σ, γ. Dadurch wird die Differentialgleichung erhalten:

$$\frac{\Re_1}{10^{10}} = \frac{d\gamma + d \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma\, d\gamma}{d\sigma}}{\sqrt{d\sigma^2 + \sigma^2 d\gamma^2}}.$$

Beachtet man, dass die Lichtkurve sehr flach ist, dass also $\sigma d\gamma$ klein ist gegen $d\sigma$, und ferner, dass auch γ selbst immer nur wenige Bogensekunden ausmacht, so darf man mit hinreichender Genauigkeit $\operatorname{tg} \frac{\sigma\, d\gamma}{d\sigma} = \frac{\sigma\, d\gamma}{d\sigma}$ setzen, sowie $\sigma^2 d\gamma^2$ neben $d\sigma^2$ vernachlässigen und ferner $\Re_1$ als Funktion von σ allein betrachten. Dies führt zu der vereinfachten Gleichung:

$$\frac{\Re_1}{10^{10}} = \frac{d^2(\sigma\gamma)}{d\sigma^2},$$

die jetzt leicht integrierbar ist, weil $\Re_1$ als Funktion von σ allein betrachtet werden darf. Man erhält:

$$\sigma\gamma = \frac{1}{10^{10}} \int_0^\sigma \int_0^\sigma \Re_1\, d\sigma\, d\sigma$$

wobei zu beachten ist, dass für $\sigma = 0$ sowohl γ wie $\frac{d(\sigma\gamma)}{d\sigma}$ gleich Null sind. Erstreckt man die Integration bis $\sigma = s_{12}$, so wird $\gamma = \delta\varphi_{12} - \psi_1$ und:

$$\delta\varphi_{12}'' = \frac{\varrho''}{s_{12} 10^{10}} \int_0^{s_{12}} \int_0^\sigma \Re_1\, d\sigma\, d\sigma + \psi_1''.$$

Die Orientierungskonstante ψ_1 wird sich nicht immer auf leichte Weise ermitteln lassen, weil sie auch von der Art der Berechnung des trigonometrischen Netzes abhängt. Beim homogenen Refraktionsfelde wird auf ψ näher eingegangen werden.

Für $\Re_1$ darf man auch die Komponenten R_x, R_y einführen:

$$\Re_1 = -\Re_x \sin\varphi_{12} + \Re_y \cos\varphi_{12}.$$

Die Richtung der Lichtkurve in irgend einem Punkte ist zwar nicht durch φ definiert, sie wird aber stets nur um wenige Sekunden

von irgend einer der definierten Richtungen φ_{12} ($\bar{\varphi}_{12}$, $\bar{\bar{\varphi}}_{12}$, $\varphi_{12} + \delta\varphi_{12}$ usw.) abweichen, so dass es praktisch gleichgültig ist, welchen von diesen Werten man in $\mathfrak{R}_1$ einsetzt.

Man hat also:

$$\delta\varphi_{12}'' = \frac{\varrho''}{s_{12}\,10^{10}} \int_0^{s_{12}} \int_0^{\sigma} (-\mathfrak{R}_x \sin\varphi_{12} + \mathfrak{R}_y \cos\varphi_{12})\, d\sigma\, d\sigma + \psi_1''.$$

§ 3. Zusammenhang des Refraktionsvektors mit Temperatur und Barometerstand.

Um praktische Beispiele gelegentlich einfügen zu können, wird es vielleicht angebracht sein, schon jetzt auf den Zusammenhang des Refraktionsvektors mit der Hauptursache der Refraktion, der wechselnden Luftdichte, einzugehen.

Nach dem Lorentz-Lorenzschen Gesetz wird die Beziehung zwischen dem Brechungsexponenten n und der Dichte ϱ der Luft ausgedrückt durch

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \varrho \,.\, \text{const.}$$

Da n von 1 nur sehr wenig verschieden ist, so kann man den Bruch in eine abgekürzte Potenzreihe entwickeln. (Vergleiche auch die Bemerkung am Schlusse dieser Abhandlung.) Es sei $n = 1 + \nu$; damit erhält man:

$$\varrho \,.\, \text{const} = \frac{\nu^2 + 2\nu}{3 + 2\nu + \nu^2} = \frac{2}{3}\nu + \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{9}\right)\nu^2 + \ldots .$$

Wird ϱ für 0^0 und 760 mm Druck $= 1$ gesetzt, so ist allgemein für die absolute Temperatur T und den Barometerstand B:

$$\varrho = \frac{273}{T} \cdot \frac{B}{760}.$$

n hat für $\varrho = 1$ und für mittlere Lichtwellenlängen den Wert 1,000294. Die Multiplikationskonstante der Luftdichte ist daher $\frac{2}{3}$. 0,000294 und die Beziehung zwischen ν, B, T kann dann mit immer ausreichender Genauigkeit ausgedrückt werden durch:

$$n - 1 = \nu = 0{,}000294 \cdot \frac{273}{T} \frac{B}{760}.$$

Innerhalb eines hinreichend kleinen Flächenstückes kann man die Linien gleicher Luftdichte als parallel ansehen (wenn man sie

nur eng genug wählt) und kann sie auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x′, y′ so beziehen, dass sie der y′-Achse parallel laufen und eine Zunahme von x′ gleichzeitig einer Zunahme der Luftdichte entspricht. Es wird auch ausreichen, anzunehmen, dass die Luftdichte ϱ zwischen zwei dieser Niveaulinien gleich ist, dass sie sich also sprungweise ändert, wenn eine Niveaulinie überschritten wird. Stellt dx' die Entfernung der Linien gleicher Luftdichte dar, so erleidet ein Strahl, dessen Richtung mit der $+x'$-Richtung den Winkel β bildet, eine Brechung, die ausgedrückt wird durch die Gleichung:

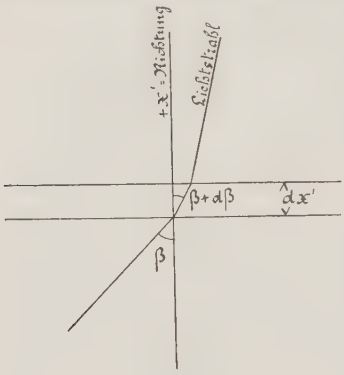

Fig. 3.

$$\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+d\beta)} = \frac{n+\frac{dn}{dx'}\cdot dx'}{n}$$

oder durch:

$$d\beta\,\mathrm{ctg}\,\beta = -\frac{dn}{n\,dx'}\,dx'$$

oder, wenn man $dx' = ds\cos\beta$ und im Nenner mit hinreichender Annäherung $n = +1$ setzt, durch die Beziehung:

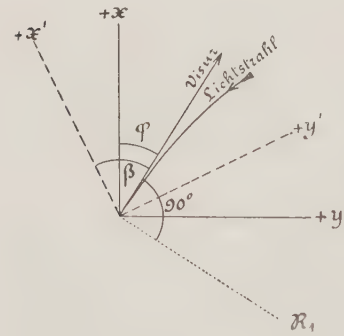

Fig. 4.

$$\frac{d\beta}{\sin\beta} = -\frac{dn}{dx'}\,ds.$$

Überschreitet der Lichtstrahl die nächste Linie gleicher Luftdichte, so erleidet er von neuem eine Brechung $d\beta'$, die (von kleinen Gliedern höherer Ordnung abgesehen) der vorigen $d\beta$ gleichgesetzt werden darf. Der Berührungskreis dieses zweimal gebrochenen Lichtstrahles hat den Radius:

$$\frac{ds}{d\beta} = -\frac{dx'}{dn\sin\beta};$$

also ist nach der definierten Grösse des Refraktionsvektors die Komponente

$$\mathfrak{R}_1 = 10^{10}\frac{d\beta}{ds} = -10^{10}\frac{dn}{dx'}\sin\beta.$$

Hierin gibt die $+x'$-Achse die Richtung der grössten Dichtezunahme der Luft an. Geht man auf ein beliebiges System x, y über, so hat man allgemein für die in der Figur 4 eingeschriebenen Beziehungen zwischen den Koordinaten und Richtungen:

$$\Re_1 = -10^{10}\frac{dn}{dx'}\sin\beta = 10^{10}\left(-\frac{\partial n}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial n}{\partial y}\cos\varphi\right)$$

$$\Re_x = +\Re_{x'}\cos(\beta-\varphi) = 10^{10}\frac{dn}{dx'}\cos(\beta-\varphi) = 10^{10}\frac{\partial n}{\partial x} =$$

$$10^{10}\,.\,0{,}000294\,\frac{273}{760}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\frac{1}{T} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{B}{T^2}\right) = \frac{1{,}06\,.\,10^6}{T}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{B}{T}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\Re_y = -\Re_{x'}\sin(\beta-\varphi) = -10^{10}\frac{dn}{dx'}\sin(\beta-\varphi) = +10^{10}\frac{\partial n}{\partial y} =$$

$$10^{10}\,.\,0{,}000294\,\frac{273}{760}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\frac{1}{T} - \frac{\partial T}{\partial y}\frac{B}{T^2}\right) = \frac{1{,}06\,.\,10^6}{T}\left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{B}{T}\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Die Einführung des Barometerstandes B in mm und der Temperatur T in Zentesimalgraden (vom absolutem Nullpunkt aus gezählt) in die Refraktionsverbesserung $\delta\varphi$ gibt schliesslich, wenn die Visurlänge s in Einheiten von 10 km Länge ausgedrückt wird:

$$\delta\varphi''_{12} = \frac{21{,}''8}{s_{12}}\int_0^{s_{12}}\int_0^{\sigma}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{T}\right)\sin\varphi_{12} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B}{T}\right)\cos\varphi_{12}\right\}d\sigma\,d\sigma + \psi_1''.$$

§ 4. Das homogene Refraktionsfeld.

Wenn ein Vektor innerhalb eines betrachteten Gebietes gleiche Grösse und gleiche Richtung hat, so wird das Vektorfeld homogen genannt. In der Seitenrefraktion wird sich dieses Feld als erste Annäherung häufig empfehlen, weil man oft genug doch nur wenige Daten für die Bestimmung des Vektorfeldes zur Verfügung haben wird und man sich meist mit einer rohen Näherung des Feldes (für einen Bereich von wenigen zusammenliegenden geodätischen Dreiecken) begnügen kann und muss.

Durch die Eigenschaft als erste Näherung wird das homogene Feld besonders geeignet, die wichtigsten Refraktionserscheinungen rein darzustellen, während die nebensächlichen Wirkungen dabei verschwinden.

Angenommen, der auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogene Vektor habe die Richtung der $-x$-Achse. Die Refraktionsverbesserung $\delta\varphi$ in § 2 geht dann für das homogene Feld über in:

$$\delta\varphi_{12}'' = -\frac{\varrho''}{10^{10}\cdot 2}\Re_x s_{12}\sin\varphi_{12} + \psi_1''$$

oder, wenn zur Abkürzung $\frac{-\varrho''\,\Re_x}{10^{10}\cdot 2} = \varrho''\cdot c = c''$ gesetzt wird:

$$\delta\varphi_{12} = c\, s_{12}\sin\varphi_{12} + \psi_1.$$

Nun ist $s_{12}\sin\varphi_{12} = y_2 - y_1$, daher

$$\delta\varphi_{12} = c\,(y_2 - y_1) + \psi_1.$$

Dies gilt für eine Richtung von P_1 nach P_2. Für eine Richtung von P_1 nach P_3 hat man analog:

$$\delta\varphi_{13} = c\,(y_3 - y_1) + \psi_1.$$

Damit folgt die Refraktionsverbesserung $\delta\varphi_1$ des Dreieckswinkels am Punkte P_1:

Fig. 5.

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi_{13} - \delta\varphi_{12} = c\,(y_3 - y_2);$$

ebenso erhält man:

$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_{21} - \delta\varphi_{23} = c\,(y_1 - y_3),$$
$$\delta\varphi_3 = \delta\varphi_{32} - \delta\varphi_{31} = c\,(y_2 - y_1).$$

Damit der Überschuss der Winkelsumme über (180^0 + Exzess) von Refraktionseinflüssen befreit wird, muss er daher verbessert werden um:

$$\delta w = \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2 + \delta\varphi_3 = c\,[(y_3 - y_2) + (y_1 - y_3) + (y_2 - y_1)] = \mathbf{0}.$$

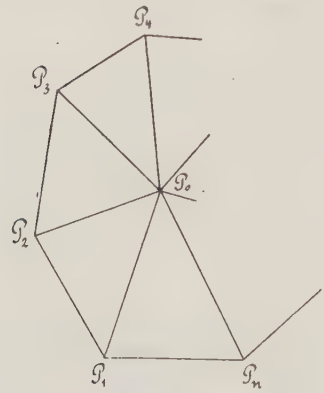

Fig. 6.

Das homogene Refraktionsfeld übt auf die Grösse der Dreiecksschlussfehler keinen Einfluss aus.

Ähnlich verhält es sich mit dem Einfluss der Refraktion auf die Schlussfehler der Seitengleichungen. Setzt man die Winkelverbesserungen in eine Seitengleichung ein und benutzt die Punktbezeichnungen der Figur 6, so folgt (von Messungsfehlern und Erdkrümmung abgesehen), wenn zugleich P_0 als Koordinatennullpunkt gewählt wird:

$$[+ y_2\,\mathrm{ctg}\,(\varphi_{10} - \varphi_{12}) + y_1\,\mathrm{ctg}\,(\varphi_{21} - \varphi_{20})] + \ldots = \frac{\delta w}{c}.$$

Die Kotangenten lassen sich durch die Koordinaten ausdrücken, z. B.

$$\operatorname{ctg}(\varphi_{10}-\varphi_{12}) = \frac{\cos\varphi_{10}\cos\varphi_{12}+\sin\varphi_{10}\sin\varphi_{12}}{\sin\varphi_{10}\cos\varphi_{12}-\cos\varphi_{10}\sin\varphi_{12}} =$$

$$\frac{-x_1(x_2-x_1)-y_1(y_2-y_1)}{-y_1(x_2-x_1)+x_1(y_2-y_1)}$$

$$= \frac{-x_1(x_2-x_1)-y_1(y_2-y_1)}{x_1y_2-y_1x_2}.$$

Ebenso $\operatorname{ctg}(\varphi_{21}-\varphi_{20}) = \dfrac{+x_2(x_2-x_1)+y_2(y_2-y_1)}{x_1y_2-y_1x_2}.$

Die Glieder der Seitengleichung, welche die Winkel des Dreiecks $P_0P_1P_2$ umfassen, geben jetzt, in Koordinaten dargestellt:

$$+y_2\operatorname{ctg}(\varphi_{10}-\varphi_{12})+y_1\operatorname{ctg}(\varphi_{21}-\varphi_{20}) =$$

$$\frac{(x_2y_1-x_1y_2)(x_2-x_1)+(y_1y_2-y_1y_2)(y_2-y_1)}{x_1y_2-y_1x_2} = x_1-x_2,$$

und die ganze Bedingungsgleichung erhält als Verbesserung δw des Schlussfehlers, zwecks Ausscheidung des Refraktionseinflusses:

$$c[(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+(x_3-x_4)+\ldots+(x_n-x_1)] = +\delta w = \mathbf{0}.$$

Ein homogenes Refraktionsfeld übt auch auf die Widersprüche der Seitenbedingungsgleichungen keinen Einfluss aus.

Das trigonometrische Netz ist also in sich vollkommen widerspruchsfrei, auch wenn die Refraktionsfehler nicht beseitigt werden.

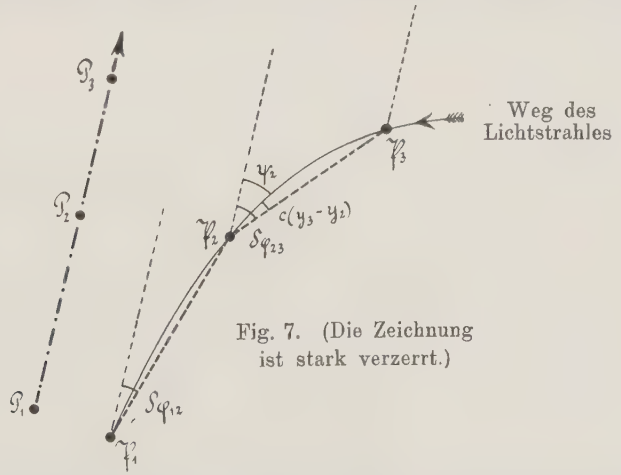

Fig. 7. (Die Zeichnung ist stark verzerrt.)

In keiner Weise verrät das trigonometrische Netz allein das Vorhandensein eines homogenen Refraktionsfeldes, und doch kann es sehr erheblichen Verzerrungen ausgesetzt sein. Um diese zu finden, muss man einen Lichtstrahl genauer verfolgen.

Auf dem Wege eines Lichtstrahles (der in der Figur 7 durch eine scharf ausgezogene Linie bezeichnet ist) mögen die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ liegen. Von $\mathfrak{P}_1$ aus gesehen wird man daher den Eindruck haben, als ob diese drei Punkte in einer Graden lägen. Wird das trigonometrische Netz berechnet und dargestellt, ohne Rücksicht auf Refraktion, so werden diese drei Punkte in der Zeichnung wirklich in einer Geraden (die in der Figur strichpunktiert ist) liegen und sich etwa an den Orten P_1, P_2, P_3 befinden. Die punktierten geraden Verbindungslinien zwischen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ stellen die nicht mit Refraktion behafteten, fehlerfreien Dreiecksseiten dar, falls man sich $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ als trigonometrische Punkte denkt. Zieht man durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ Parallele zu der mit Refraktionsfehlern behafteten Richtung P_1—P_3, so ist beispielsweise auf Punkt $\mathfrak{P}_2$ der Winkel zwischen dieser Parallelen und der geraden Verbindungslinie $\mathfrak{P}_2$—$\mathfrak{P}_3$ identisch mit der Refraktionsverbesserung $\delta\varphi_{23}$, die man der Richtung von P_2 nach P_3 hinzufügen muss, um sie von Refraktionsfehlern zu befreien. Beim homogenen Felde fallen die Richtungen φ zusammen mit den im § 2 erläuterten Richtungen $\overline{\varphi}$, die den geraden Verbindungslinien zwischen den Punkten P zukommen. Es ist daher $\varphi_{21} = \varphi_{12} + 180^0$. Da auch $\varphi_{12} + \delta\varphi_{12}$ und $\varphi_{21} + \delta\varphi_{21}$ als gegenseitige fehlerfreie Richtungen mit der geraden Verbindungslinie der Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zusammenfallen, sich also nur um 180^0 voneinander unterscheiden, so muss beim homogenen Felde $\delta\varphi_{21} = \delta\varphi_{12}$ sein. Das ist auch leicht aus der obigen Figur zu ersehen. Nun ist

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{21} &= \quad c(y_1 - y_2) + \psi_2 \\ \delta\varphi_{12} &= \quad c(y_2 - y_1) + \psi_1 \\ \text{folglich} \quad 0 &= -2c(y_2 - y_1) + (\psi_2 - \psi_1) \end{aligned}$$

Für zwei hinreichend nahe liegende Punkte geht diese Gleichung über in

$$2\,c\,dy = d\psi.$$

Diese Differentialgleichung gilt für jede Richtung von einem bestimmten Punkte aus (denn sie enthält gar keine Richtung), sie gilt auch allgemein für das ganze homogene Refraktionsgebiet (denn sie bezieht sich auf keine bestimmte Koordinate). Das allgemeine Integral ist:

$$2\,c\,y = \psi + \text{const.}$$

Damit sind alle Orientierungsunbekannten ψ, die in den Refraktionsverbesserungen auftreten, in Zusammenhang gebracht. Nur eine einzige von allen Orientierungsverbesserungen darf man willkürlich wählen und darf sie als willkürliche Verdrehung des ganzen Netzes

deuten. Setzt man sie im Koordinatennullpunkt gleich Null, so ist die Verdrehung eines trigonometrischen Netzes in einem homogenen Refraktionsfelde ausdrückbar durch:

$$\psi = 2\,c\,y = \frac{-\,\Re_x}{10^{10}}\,y.$$

Die gesamte Refraktionsverbesserung ist daher, wenn der Vektor die Richtung der — x-Achse hat:

$$\delta\varphi_{12} = \frac{-\,\Re_x}{10^{10}}\,\frac{y_2 - y_1}{2} + \frac{-\,\Re_x}{10^{10}}\,y_1 = \frac{-\,\Re_x}{10^{10}}\,\frac{y_2 + y_1}{2}.$$

Werden in den Punkten $P_1 \equiv x_1,\ y_1$ und $P_2 \equiv x_2,\ y_2$ die Azimute astronomisch bestimmt, so muss die geodätische Übertragung des Azimutes von P_1 nach P_2 um

$$\frac{-\,\Re_x}{10^{10}}(y_2 - y_1)\,\varrho''$$

verbessert werden, um das in P_2 direkt gemessene zu erhalten.

Die Trennung der Verbesserung $\delta\varphi_{23}$ in $c\,(y_3 - y_2)$ und ψ_2 ist in obiger Zeichnung kenntlich gemacht.

Der ganze Einfluss eines homogenen Refraktionsfeldes auf ein Dreiecksnetz lässt sich anschaulich und übersichtlich durch eine konforme Abbildung darstellen. Ein trigonometrisches Netz werde einmal im rechtwinkligen System x, y verzerrt und einmal im rechtwinkeligen System $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in richtigen Grössenverhältnissen so abgebildet, dass

$$R + \mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y} = R\,e^{\frac{x + i\,y}{R}}$$

wird. Die Konstante R ist vorläufig willkürlich. Wie schon C. F. Gauss gezeigt hat, ist diese Abbildung konform. Nach Anwendung der Reihenentwicklung:

$$e^{\frac{x + i\,y}{R}} = 1 + \left(\frac{x + i\,y}{R}\right)\frac{1}{1!} + \left(\frac{x + i\,y}{R}\right)^2\frac{1}{2!} + \dots$$

und nach Trennung reeller und imaginärer Teile folgt:

$$\mathfrak{x} = x + \frac{x^2}{2\,R} - \frac{y^2}{2\,R} + \frac{x^3}{6\,R^2} - \frac{x\,y^2}{2\,R^2} + \dots,$$

$$\mathfrak{y} = y + \frac{x\,y}{R} + \frac{x^2\,y}{2\,R^2} - \frac{y^3}{6\,R^2} + \dots.$$

Die Nachbarschaft eines Punktes P_1 kann man im System x, y vorübergehend durch Polarkoordinaten ausdrücken. Für einen Punkt P_2 in diesem Gebiet ist:

$$x_2 - x_1 = s_{12}\cos\varphi_{12},\quad y_2 - y_1 = s_{12}\sin\varphi_{12}.$$

Unter der Annahme, dass die Abbildung im System ξ, η nur wenig gegen die verzerrte Gestalt des trigonometrischen Netzes abweicht, kann man mit Hilfe kleiner Grössen δs_{12} und $\delta \varphi_{12}$ im System ξ, η in erster Näherung schreiben:

$$\xi_2 - \xi_1 = (s_{12} + \delta s_{12}) \cos(\varphi_{12} + \delta \varphi_{12}) =$$
$$(x_2 - x_1) + \delta s_{12} \frac{x_2 - x_1}{s_{12}} - \delta \varphi_{12}(y_2 - y_1),$$

$$\eta_2 - \eta_1 = (s_{12} + \delta s_{12}) \sin(\varphi_{12} + \delta \varphi_{12}) =$$
$$(y_2 - y_1) + \delta s_{12} \frac{y_2 - y_1}{s_{12}} + \delta \varphi_{12}(x_2 - x_1).$$

Anderseits folgt aus obiger Reihenentwicklung:

$$\xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1) + \frac{x_2^2 - x_1^2 - y_2^2 + y_1^2}{2R} + \ldots,$$

$$\eta_2 - \eta_1 = (y_2 - y_1) + \frac{x_2 y_2 - x_1 y_1}{R} + \ldots$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke getrennt für $\xi_2 - \xi_1$ und $\eta_2 - \eta_1$ liefert die Gleichungen:

$$+ \delta s_{12} \frac{x_2 - x_1}{s_{12}} - \delta \varphi_{12}(y_2 - y_1) = \frac{x_2^2 - x_1^2 - y_2^2 + y_1^2}{2R},$$

$$+ \delta s_{12} \frac{y_2 - y_1}{s_{12}} + \delta \varphi_{12}(x_2 - x_1) = \frac{x_2 y_2 - x_1 y_1}{R},$$

deren Auflösung die Verbesserungen δs und $\delta \varphi$ gibt, die man den Längen und Richtungen im System x, y (in der verzerrten Darstellung) zulegen muss, damit dieses in das System ξ, η (in die natürliche Darstellung) übergeht:

$$\delta s_{12} = \frac{x_1 + x_2}{2R} \cdot s_{12}, \quad \delta \varphi_{12} = \frac{y_1 + y_2}{2R}.$$

Setzt man die noch willkürlich gelassene Konstante R gleich $-\frac{10^{10}}{\Re_x}$, so werden die Verbesserungen $\delta \varphi$ der Projektion gleich jenen der Refraktion. Aus dieser Analogie ergibt sich der Schluss, dass die Koordinaten x, y eines ohne Rücksicht auf ein homogenes Refraktionsfeld berechneten Dreiecksnetzes zu den Koordinaten ξ, η desselben, aber von Refraktion befreiten Netzes durch die Beziehungen:

$$\xi = x - \frac{x^2 - y^2}{2 \cdot 10^{10}} \Re_x,$$

$$\eta = y - \frac{x y}{10^{10}} \Re_x$$

verbunden sind und ferner, dass die bei Elimination der Refraktion entstehenden Zerrungen in Länge durch

$$\delta s_{12} = - \frac{x_1 + x_2}{2 \cdot 10^{10}} \mathfrak{R}_x$$

dargestellt werden können.

In der nachstehenden Zeichnung ist das durch Refraktion hervorgebrachte Zerrbild (übertrieben) veranschaulicht. Das scharf ausge-

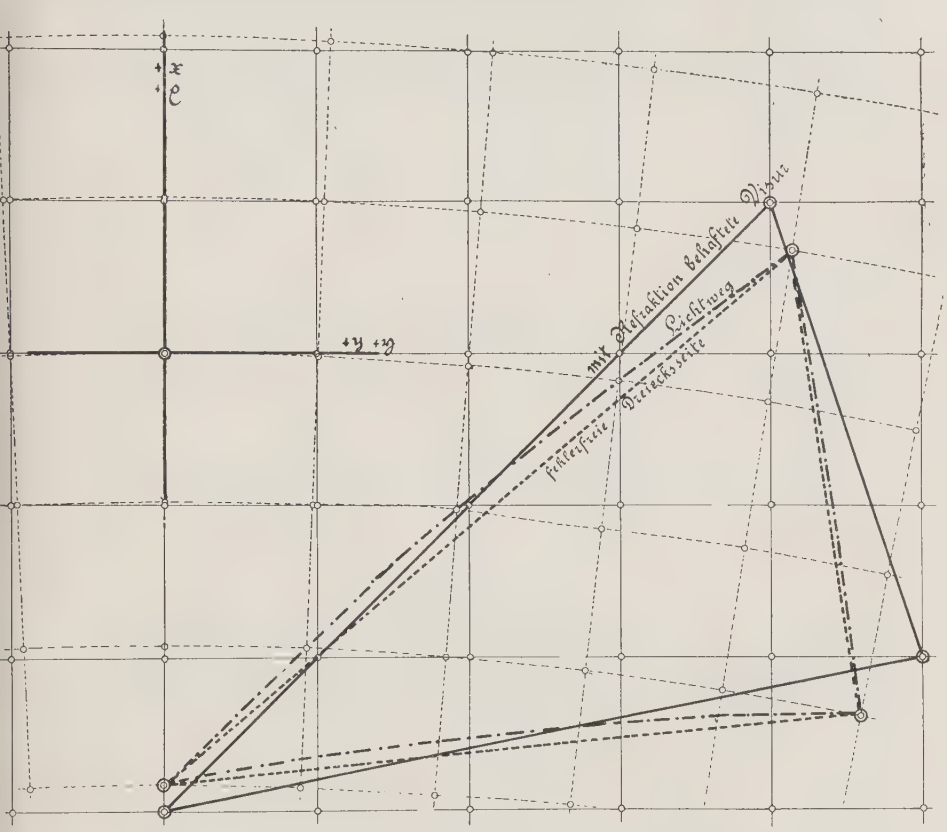

Fig. 8.

zogene Dreieck und das Koordinatennetz erhält man, wenn auf Refraktion keine Rücksicht genommen wird; die punktierten feinen Linien stellen das Hilfsnetz x, y im System ξ, η dar. Die fehlerfreien Dreiecksseiten sind starkpunktiert und die Lichtwege strichpunktiert.

§ 5. Beispiel zum homogenen Refraktionsfelde.

Angenommen, es sei in Kalifornien im Juli eine trigonometrische Kette, die sich 1000 km längs der Küste ausdehnt, gemessen und die Endazimute seien astronomisch bestimmt worden. Nach Hanns Atlas der Meteorologie herrscht zu dieser Zeit in Kalifornien seewärts ein mittleres Temperaturgefälle von 1^0 auf 20 km bei einer Mitteltemperatur von 24^0 C und einem mittleren Barometerstand von 760 mm. (Mittlere Temperaturgefälle von dieser Grössenordnung gibt es auch im Januar im afrikanischen Kapland und im Süden Australiens.) Legt man die + x-Achse eines Koordinatensystems landeinwärts, also die y-Achse der Küste parallel und den Koordinatennullpunkt in die Mitte des ganzen Gebietes, so ist nach § 3 Seite 9:

$$-\mathfrak{R}_x = 10^{10}\frac{0{,}000294\,.\,273}{(273+24)^2}\cdot\frac{1}{20000} = +0{,}47,$$

$$\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_y = 0$$

und nach Seite 13

$$\delta\varphi''_{12} = +\frac{0{,}47\varrho''}{2\,.\,10^{10}}(y_2 - y_1) + \frac{0{,}47\,\varrho''}{10^{10}}y_1.$$

Im Endpunkt der Dreieckskette ($y_1 = +500$ km) hat man bei einer Visurlänge $s_{12} = 50$ km beispielsweise:

$$\delta\varphi_{12}'' = +0{,}''24\sin\varphi_{12} + 4{,}''8.$$

Das eine Azimut muss gegen die geodätische Übertragung des anderen um

$$\frac{0{,}47\,\varrho''}{10^{10}}\,.\,1000000 = 9{,}''7$$

abweichen. Da das betrachtete Gebiet die mittlere nördliche Breite 34^0 hat, so würde in diesem Falle die Laplacesche Gleichung der Lotabweichungen (von Messungsfehlern abgesehen) den Widerspruch

$$\frac{9{,}''7}{\sin 34^0} = 17''$$

zeigen.

(Streng genommen wäre nicht das mittlere Temperaturgefälle für den ganzen Monat zu nehmen, sondern das jeweilige Temperaturgefälle zur Zeit der Messung. Da man in den Nachmittagsstunden zu messen pflegt, so wird der Wärmeunterschied zwischen Land und Meer sicher noch grösser sein, als es das Monatsmittel angibt; das Temperaturgefälle wird also zur Messungszeit noch erheblich stärker sein als hier angenommen wurde. Der Fehler 17″ ist deshalb eher

zu klein als zu gross angegeben. In Ermangelung ausreichender meteorologischer Daten mussten monatliche Durchschnittswerte zu Hilfe genommen werden.)

§ 6. Grosse, nicht homogene Refraktionsfelder.

Von der Homogenität des Refraktionsfeldes soll jetzt abgesehen werden. Es möge aber vorausgesetzt werden, dass das betrachtete Refraktionsgebiet gross ist im Vergleich zu den einzelnen Dreiecken einer Triangulierung.

Innerhalb eines kleinen Gebietes (von wenigen, zusammenliegenden Dreiecken) kann man in Form einer abgekürzten Potenzreihe schreiben:

$$\mathfrak{R}_x = (\mathfrak{R}_x)_0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y}\right)_0 (y - y_0),$$

$$\mathfrak{R}_y = (\mathfrak{R}_y)_0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y}\right)_0 (y - y_0).$$

Macht man $x_0\, y_0$ zum Koordinatennullpunkt und drückt die Nachbarschaft eines Punktes P_1 durch Polarkoordinaten so aus:

$$x = x_1 + \sigma \cos \varphi, \quad y = y_1 + \sigma \sin \varphi,$$

so darf man $\mathfrak{R}_x$ und $\mathfrak{R}_y$ auch schreiben:

$$\mathfrak{R}_x = (\mathfrak{R}_x)_0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x}\right)_0 (x_1 + \sigma \cos \varphi) + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y}\right)_0 (y_1 + \sigma \sin \varphi),$$

$$\mathfrak{R}_y = (\mathfrak{R}_y)_0 + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)_0 (x_1 + \sigma \cos \varphi) + \left(\frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y}\right)_0 (y_1 + \sigma \sin \varphi).$$

Diese Grössen kann man unmittelbar in das Integral

$$\delta \varphi_{12} = \frac{10}{s_{12}}^{-10} \int_0^{s_{12}} \int_0^{\sigma} (-\mathfrak{R}_x \sin \varphi_{12} + \mathfrak{R}_y \cos \varphi_{12})\, d\sigma\, d\sigma + \psi_1$$

einführen und erhält, wenn der Index 0 weggelassen wird:

$$\delta \varphi_{12} = \frac{10}{2}^{-10} s_{12} \Big\{ [-\mathfrak{R}_x \sin \varphi_{12} + \mathfrak{R}_y \cos \varphi_{12}]$$

$$+ \left[-\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x} x_1 \sin \varphi_{12} - \frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} y_1 \sin \varphi_{12} + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x} x_1 \cos \varphi_{12} + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y} y_1 \cos \varphi_{12} \right]$$

$$+ \frac{1}{3} s_{12} \left[\left(-\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y} \right) \cos \varphi_{12} \sin \varphi_{12} - \frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} \sin^2 \varphi_{12} + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x} \cos^2 \varphi_{12} \right] \Big\}$$

$$+ \psi_1$$

oder, wenn wieder auf Koordinaten zurückgegangen wird:

$$\delta\varphi_{12} = \frac{10^{-10}}{6}\Big\{3[-\Re_x(y_2-y_1)+\Re_y(x_2-x_1)] - \frac{\partial\Re_x}{\partial x}(x_2+2x_1)(y_2-y_1) + \frac{\partial\Re_y}{\partial y}(y_2+2y_1)(x_2-x_1) - \frac{\partial\Re_x}{\partial y}(y_2+2y_1)(y_2-y_1) + \frac{\partial\Re_y}{\partial x}(x_2+2x_1)(x_2-x_1)\Big\} + \psi_1.$$

Bei einer einzelnen Visur nimmt man zweckmässigerweise den Messungspunkt selbst als Koordinatennullpunkt:

$$\delta\varphi_{12} = \frac{10^{-10}}{2}\Big\{s_{12}[-\Re_x\sin\varphi_{12}+\Re_y\cos\varphi_{12}] + \frac{s_{12}^2}{3}\Big[\Big(-\frac{\partial\Re_x}{\partial x}+\frac{\partial\Re_y}{\partial y}\Big)\cos\varphi_{12}\sin\varphi_{12} - \frac{\partial\Re_x}{\partial y}\sin^2\varphi_{12} + \frac{\partial\Re_y}{\partial x}\cos^2\varphi_{12}\Big]\Big\} + \psi_1.$$

Die Vektorkomponenten und ihre Ableitungen beziehen sich hier auf P_1.

Um zu finden, wie der Schlussfehler w eines Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$ durch die Refraktionsverbesserungen geändert wird, bilde man zunächst:

$$\delta\varphi_{21}-\delta\varphi_{12} = \frac{10^{-10}}{2}\Big\{2[+\Re_x(y_2-y_1)-\Re_y(x_2-x_1)] + \frac{\partial\Re_x}{\partial x}(x_2+x_1)(y_2-y_1) - \frac{\partial\Re_y}{\partial y}(y_2+y_1)(x_2-x_1) + \frac{\partial\Re_x}{\partial y}(y_2^2-y_1^2) - \frac{\partial\Re_y}{\partial x}(x_2^2-x_1^2)\Big\} + \psi'_2-\psi'_1$$

und für das ganze Dreieck:

$$\delta w = (\delta\varphi_{21}-\delta\varphi_{12})+(\delta\varphi_{32}-\delta\varphi_{23})+(\delta\varphi_{13}-\delta\varphi_{31})$$
$$= \frac{10^{-10}}{2}\Big\{\frac{\partial\Re_x}{\partial x}[(x_2+x_1)(y_2-y_1)+(x_3+x_2)(y_3-y_2)+(x_1+x_3)(y_1-y_3)] - \frac{\partial\Re_y}{\partial y}[(y_2+y_1)(x_2-x_1)+(y_3+y_2)(x_3-x_2)+(y_1+y_3)(x_1-x_3)]\Big\}.$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern sind nichts anderes als der doppelte positive bezw. negative Flächeninhalt F des Dreiecks. Daher hat man, wenn $\frac{\partial\Re_x}{\partial x}+\frac{\partial\Re_y}{\partial y} = \operatorname{div}\Re$ (Divergenz von $\Re$) geschrieben wird, die einfache Formel:

$$\underline{\delta w = 10^{-10}\,F\,\operatorname{div}\Re}$$

oder wenn δw in Sekunden und F in ha ausgedrückt wird:

$$\delta w'' = 0{,}''206\, F \operatorname{div} \mathfrak{R}.$$

Es ist δw zum Überschuss der Winkelsumme über $180^0 +$ Exzess hinzuzufügen, um den Refraktionseinfluss wieder zu beseitigen.

Der Schlussfehler einer Seitenbedingungsgleichung von der Gestalt:

$$w = \lg \frac{\sin(\varphi_{10} - \varphi_{12}) \cdot \sin(\varphi_{20} - \varphi_{23}) \ldots}{\sin(\varphi_{21} - \varphi_{20}) \cdot \sin(\varphi_{32} - \varphi_{30}) \ldots}$$

ist, wenn die Bezeichnungen der Figur 6 auf Seite 10 gelten, zu verbessern um:

$$\delta w = +(\delta\varphi_{10} - \delta\varphi_{12}) \operatorname{ctg}(\varphi_{10} - \varphi_{12}) + (\delta\varphi_{20} - \delta\varphi_{21}) \operatorname{ctg}(\varphi_{21} - \varphi_{20})] + \ldots .$$

Die Kotangenten kann man durch Koordinaten ausdrücken, wie es auf Seite 11 geschehen ist:

$$\operatorname{ctg}(\varphi_{10} - \varphi_{12}) = \frac{+x_1 x_2 + y_1 y_2 - x_1^2 - y_1^2}{x_2 y_1 - x_1 y_2},$$

$$\operatorname{ctg}(\varphi_{21} - \varphi_{20}) = \frac{+x_1 x_2 + y_1 y_2 - x_2^2 - y_2^2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}.$$

Ferner erhält man nach Seite 18 unter Weglassung des homogenen Feldes, das nach vorigem Paragraphen keinen Einfluss auf den Schlussfehler der Bedingungsgleichungen hat:

$$(\delta\varphi_{10} - \delta\varphi_{12}) = \frac{10^{-10}}{6}\Big\{+\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x}[(x_2 + 2x_1)(y_2 - y_1) + 2x_1 y_1] - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y}[(y_2 + 2y_1)(x_2 - x_1) + 2x_1 y_1)] + \frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y}[(y_2 + 2y_1)(y_2 - y_1) + 2y_1^2] - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}[(x_2 + 2x_1)(x_2 - x_1) + 2x_1^2]\Big\},$$

$$(\delta\varphi_{20} - \delta\varphi_{21}) = \frac{10^{-10}}{6}\Big\{+\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x}[-(x_1 + 2x_2)(y_2 - y_1) + 2x_2 y_2] + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y}(y_1 + 2y_2)(x_2 - x_1) - 2x_2 y_2] + \frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y}[-(y_1 + 2y_2)(y_2 - y_1) + 2y_2^2] + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}[(x_1 + 2x_2)(x_2 - x_1) - 2x_2^2]\Big\}.$$

Die partiellen Ableitungen des Vektors beziehen sich auf den Koordinatennullpunkt P_0, sind also als Konstanten zu betrachten, die von dem Koordinatensystem nicht mehr abhängen. Wird jetzt das ganze

Netzbild, das zur Seitengleichung gehört, etwa um die x-Achse umgeklappt, so lässt sich für das Spiegelbild ganz dieselbe Rechnung durchführen. Sie geht aus der ersten Rechnung dadurch hervor, dass die Vorzeichen der Ordinaten y und das Vorzeichen der Verbesserung δw umgekehrt werden. Die Glieder, in denen $\frac{\partial \Re_x}{\partial x}$ ctg und $\frac{\partial \Re_y}{\partial y}$ ctg vorkommen, behalten beim Übergang vom ursprünglichen zum Spiegelbilde ihre Vorzeichen; denn sie (bezw. ihre Koeffizienten) kehren sowohl im Zähler als auch im Nenner das Vorzeichen um. Da aber das Schlussglied δw sein Vorzeichen bei diesem Vorgang wechselt, so können die Glieder, welche $\frac{\partial \Re_x}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Re_y}{\partial y}$ als Faktoren haben, keinen Beitrag zur Verbesserung δw liefern. (Es müsste sich auch durch unmittelbare Ausrechnung der Verbesserung δw zeigen lassen, dass diese Glieder sich gegenseitig aufheben, was aber sehr mühsam wäre.) Von den Refraktionsverbesserungen $\delta\varphi$ können also höchstens die mit $\frac{\partial \Re_x}{\partial y}$ und $\frac{\partial \Re_y}{\partial x}$ multiplizierten Teile einen Beitrag zu δw liefern.

Transformiert man die Koordinaten in ein anderes rechtwinkliges System x′, y′ nach den Beziehungen:

$$x = (x' + y')\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = (x' - y')\sqrt{\frac{1}{2}},$$

so behalten die Kotangenten als Invarianten ihre Gestalt:

$$\operatorname{ctg}(\varphi_{10} - \varphi_{12}) = \frac{x_1' x_2' + y_1' y_2' - x_1'^2 - y_1'^2}{y_1' x_2' - x_1' y_2'},$$

$$\operatorname{ctg}(\varphi_{21} - \varphi_{20}) = \frac{x_1' x_2' + y_1' y_2' - x_2'^2 - y_2'^2}{y_1' x_2' - x_1' y_2'},$$

und die noch in Betracht kommenden Teile der Refraktionsverbesserungen gehen über in:

$$\delta\varphi_{10} - \delta\varphi_{12} = \begin{matrix}10\\12\end{matrix}^{-10} \left\{ \frac{\partial \Re_x}{\partial y} [(x_2'^2 + y_2'^2 + x_1' x_2' + y_1' y_2') - (x_1' y_2' + y_1' x_2' + 2 x_2' y_2')] - \frac{\partial \Re_y}{\partial x} [(x_2'^2 + y_2'^2 + x_1' x_2' + y_1' y_2') + (x_1' y_2' + y_1' x_2' + 2 x_2' y_2')] \right\}.$$

Entsprechendes gilt für $\delta\varphi_{20} - \delta\varphi_{21}$.

Klappt man nunmehr das geometrische Bild, das zur Seitengleichung gehört, um die x′-Achse um und führt dieselben Rechnungen für das ursprüngliche und das gespiegelte Bild durch, so erhält man, ganz wie bei dem obigen analogen Verfahren, dasselbe Vorzeichen für den mit $x_1' y_2' + y_1' x_2' + 2 x_2' y_2'$ multiplizierten Teil, während der Schlusswert δw sein Vorzeichen wechselt. Dieser Teil kann daher keinen Beitrag zu δw liefern. Beachtet man noch, dass $x_2'^2 + y_2'^2 + x_1' x_2' + y_1' y_2'$ und die entsprechenden Ausdrücke in den anderen Winkelverbesserungen Invarianten für die Drehung des Koordinatenkreuzes um den Nullpunkt P_0 sind, so dass man die Akzente einfach fortzulassen hat, wenn man wieder auf das ungestrichene System übergeht, so sind die wirksamen Refraktionsverbesserungen bereits eingeschränkt auf:

$$\delta\varphi_{10} - \delta\varphi_{12} = \frac{10^{-10}}{12}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)(x_2^2 + y_2^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2).$$

Ebenso erhält man die wirksamen Teile der anderen Refraktionsverbesserungen, z. B.:

$$\delta\varphi_{20} - \delta\varphi_{21} = \frac{10^{-10}}{12}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)(x_1^2 + y_1^2 + x_1 x_2 + y_1 y_2).$$

Sie sind einfach genug, um sie nunmehr in die ersten Glieder der Seitenbedingungsgleichung, welche die Winkel des Dreiecks $P_0 P_1 P_2$ enthalten, einsetzen zu können:

$$[(\delta\varphi_{10} - \delta\varphi_{12})\operatorname{ctg}(\varphi_{10} - \varphi_{12}) + (\delta\varphi_{20} - \delta\varphi_{21})\operatorname{ctg}(\varphi_{21} - \varphi_{20})]$$

$$= \frac{10^{-10}}{12}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)\frac{[(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2^2 + y_2^2)] \cdot [(x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_1^2 + y_1^2)]}{y_1 x_2 - x_1 y_2} + \frac{[(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1^2 + y_1^2)] \cdot [(x_1 x_2 + y_1 y_2) - (x_2^2 + y_2^2)]}{-x_1 y_2}$$

$$= \frac{10^{-10}}{6}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)\frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 - (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{y_1 x_2 - x_1 y_2}$$

$$= + \frac{10^{-10}}{6}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)(-y_1 x_2 + x_1 y_2).$$

Der Ausdruck $x_1 y_2 - y_1 x_2$ ist der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $P_0 P_1 P_2$. Versteht man unter F den Flächeninhalt des gesamten Umfangspolygons der Seitengleichung und wendet man die vektoranalytische Bezeichnung $\frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} = \operatorname{curl}_z \mathfrak{R}$ an, so folgt als

Verbesserung der $\left(\text{im Sinne } w = \lg \frac{\sin(\varphi_{10} - \varphi_{12}) \sin(\varphi_{20} - \varphi_{23}) \ldots}{\sin(\varphi_{21} - \varphi_{20}) \sin(\varphi_{32} - \varphi_{30}) \ldots}\right)$

gerechneten Bedingungsgleichung:

$$\delta w = -\frac{10^{-10}}{3} F \operatorname{curl}_z \mathfrak{R}$$

oder, wenn δw in Einheiten der siebenten Dezimale der briggischen Logarithmen und F in ha ausgedrückt wird:

$$\delta w_7 = -1{,}45 F \operatorname{curl}_z \mathfrak{R}.$$

Der Einfluss der Refraktion auf ein Dreiecksnetz lässt sich auch hier (wie beim homogenen Felde) mit Hilfe konformer Abbildungen wenigstens zum Teil anschaulich darstellen. Zur Vereinfachung der Rechnung trennt man zweckmässig den Refraktionsvektor in vier Teile:

I. $\mathfrak{R}_x = (\mathfrak{R}_x)_0, \quad \mathfrak{R}_y = (\mathfrak{R}_y)_0,$

II. $\mathfrak{R}_x = \frac{x}{2} \operatorname{div} \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R}_y = \frac{y}{2} \operatorname{div} \mathfrak{R},$

III. $\mathfrak{R}_x = \frac{x}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y}\right)_0 + \frac{y}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)_0,$

$$\mathfrak{R}_y = -\frac{y}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y}\right)_0 + \frac{x}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)_0,$$

IV. $\mathfrak{R}_x = -\frac{y}{2} \operatorname{curl}_z \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R}_y = +\frac{x}{2} \operatorname{curl}_z \mathfrak{R}.$

Man darf diese vier Vektoren wieder superponieren und erhält dann als Summe aller Teile, wie man sich durch Ausrechnung leicht überzeugen kann, wieder die eingangs dieses Paragraphen angenommene Gestalt des Gesamtvektors, wenn dort x_0, y_0 zum Koordinatennullpunkt gemacht wird.

Der I. Teil entspricht einem homogenen Felde und ist bereits im vorigen Paragraphen erledigt.

Der II. Teil wird durch eine konforme Übertragung des Dreiecksnetzes von der Kugel auf die Ebene veranschaulicht. Betrachtet man auf einer Kugel mit dem Radius R, dessen Grösse noch näher festzusetzen ist, sphärische Polarkoordinaten u (= Grosskreisbogen) und v (= Azimut), so liefert eine konforme Polarprojektion mit den Koordinaten r (= Radiusvektor) und v (= Azimut) die Differentialgleichung

$$\frac{dv \sin u}{du} = \frac{r dv}{dr};$$

und die vollständige Beziehung eines Punktes der Kugel zu seinem Abbild auf der Ebene ist:

$$2R\,\mathrm{tg}\frac{u}{2} = r,\quad v = v.$$

Eine Krümmung zentraler Linien tritt nicht ein.

Die nächste Umgebung eines Punktes r_1, v_1 auf der Ebene drückt man zweckmässig durch rechtwinkelige Koordinaten ξ, η vorübergehend so aus:

$$\eta = -\,r\cos(v - v_1) + r_1,$$
$$\xi = +\,r\sin(v - v_1).$$

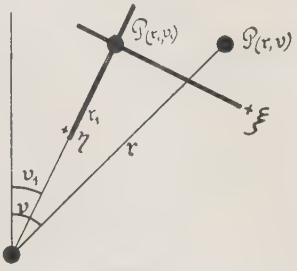

Fig. 9.

Die Elimination von v führt zu der Gleichung:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\eta r_1 = r^2 - r_1^2.$$

Auf der Kugel ist die Gleichung eines Grosskreisbogens, der im Punkte u_1, v_1 die Koordinate u_1 (den Meridian) senkrecht schneidet, gegeben durch:

$$\cos(v - v_1) = \frac{\mathrm{tg}\,u_1}{\mathrm{tg}\,u} = \frac{\mathrm{tg}\frac{u_1}{2}\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{u}{2}\right)}{\mathrm{tg}\frac{u}{2}\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{u_1}{2}\right)},$$

und in dem ebenen System lautet diese Gleichung:

$$\cos(v - v_1) = \frac{r_1}{r}\cdot\frac{4R^2 - r^2}{4R^2 - r_1^2}.$$

Andererseits ist:

$$\cos(v - v_1) = -\frac{\eta}{r} + \frac{r_1}{r},$$

und beide Gleichungen führen nach Elimination von v zu:

$$r^2 - r_1^2 = \frac{\eta}{r_1}(4R^2 - r_1^2).$$

Dies kann man oben in die Gleichung für ξ, η einsetzen und erhält damit:

$$\xi^2 + \eta^2 - \eta\left(r_1 + 4\frac{R^2}{r_1}\right) = 0.$$

Für den Punkt u_1, v_1 d. i. $\xi = 0$, $\eta = 0$ folgt daraus die Krümmung eines projizierten Grosskreisbogens, der senkrecht zu einer Zentrallinie (zu dem Meridian) im betrachteten Punkte steht:

$$\frac{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}{\left[1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{r_1+4\frac{R^2}{r_1}} = \frac{r_1}{2R^2}+\ldots.$$

Bestimmt man die willkürliche Konstante (den Kugelradius) R jetzt so, dass

$$\frac{1}{R} = \sqrt{-\frac{\operatorname{div}\mathfrak{R}}{10^{10}}}$$

wird und dass die Transformationsformeln

$$x = r\cos v,$$
$$y = r\sin v$$

gelten, so wird das 10^{10}fache der Krümmungskomponenten:

$$\text{der x-Komponente } +\frac{x_1}{2}\operatorname{div}\mathfrak{R},$$

$$\text{der y-Komponente } +\frac{y_1}{2}\operatorname{div}\mathfrak{R},$$

und diese sind gleichwertig den Vektorkomponenten im II. Teile, wodurch bewiesen ist, dass sich dieser Refraktionseinfluss auf ein Dreiecksnetz durch eine konforme Übertragung von der Kugel auf die Ebene konstruieren lässt. Ist die Divergenz des Vektors positiv, so erhält man einen reellen Wert für die Integrationskonstante R, wenn nicht Refraktionsverbesserungen, sondern Refraktionsfehler betrachtet werden oder wenn das trigonometrische Netz umgekehrt von der Ebene auf die Kugel übertragen wird. Die Verbesserung δw, die man einem Dreiecksschlussfehler zufügen muss, um die Refraktion unschädlich zu machen, lässt sich vollkommen in Parallele stellen zum sphärischen Exzess.

Der Teil III des Refraktionsvektors wirkt auf ein trigonometrisches Netz so ein, wie eine konforme Abbildung von einer Ebene auf eine andere. Allgemein gilt für eine solche Übertragung, wenn F eine willkürlich bestimmbare Funktion bezeichnet, die Gleichung:

$$\xi + i\eta = F(x + iy).$$

In eine Reihe entwickelt:

$$\xi + i\eta = F_{x=y=0} + \left(\frac{dF}{d(x+iy)}\right)_{x=y=0}\cdot\frac{(x+iy)}{1!} + \left(\frac{d^2F}{d(x+iy)^2}\right)_{x=y=0}\cdot\frac{(x+iy)^2}{2!}+\ldots$$

Für die konstanten Glieder (die Ableitungen von F nach dem Argument) kann man allgemein schreiben:

$$\left(\frac{d^k F}{d(x+iy)^k}\right)_{x=y=o} = a_k + i\,b_k.$$

Nach Trennung reeller und imaginärer Teile folgt dann:

$$\xi = a_o + (a_1 x - b_1 y) + \left(a_2 \frac{x^2-y^2}{2} - b_2 x y\right) + \left[\frac{a_3}{6}(x^3 - 3xy^2) - \frac{b_3}{6}(3x^2 y - y^3)\right] + \ldots,$$

$$\eta = b_o + (a_1 y + b_1 x) + \left(a_2 x y + b_2 \frac{x^2-y^2}{2}\right) + \left[\frac{b_3}{6}(x^3 - 3xy^2) + \frac{a_3}{6}(3x^2 y - y^3)\right] + \ldots.$$

Da die Konstanten a, b voneinander unabhängig und willkürlich sind, so darf man einigen, welche für den vorliegenden Zweck bedeutungslos sind, von vornherein bestimmte Werte geben:

$a_0 = 0$, $b_0 = 0$. Es bedeutet dies, dass keine Parallelverschiebung bei der Transformation eintritt;

$a_1 = 1$, $b_1 = 0$ hat den Sinn, dass keine Drehung und keine Massstabsänderung der Netzabbildung in der unmittelbaren Nachbarschaft des Nullpunktes vorgenommen wird;

$a_2 = 0$, $b_2 = 0$ entspricht der Ausschaltung des homogenen Feldes; dieses ist schon behandelt.

Zwischen den ursprünglichen Koordinaten und denen der Transformation bleiben daher die Beziehungen:

$$\xi = x + \frac{a_3}{6}(x^3 - 3xy^2) - \frac{b_3}{6}(3x^2y - y^3),$$

$$\eta = y + \frac{b_3}{6}(x^3 - 3xy^2) + \frac{a_3}{6}(3x^2y - y^3).$$

Es ergibt sich nun weiter, dass sich die Krümmungen einer im System ξ, η abgebildeten Geraden des Systems x, y gleichsetzen lassen den Krümmungen, die durch den III. Teil des Refraktionsvektors hervorgebracht werden. Man geht zweckmässig sofort zu Krümmungskomponenten über. Die Krümmung der Linie $x = \text{const.}$ ist gleich der ξ-Kompenente der Krümmung im System ξ, η. Beachtet man, dass die Seitenrefraktion nur eine sehr geringe Verzerrung eines trigonometrischen Netzes hervorbringt, so werden die Verzerrungen

durch Projektion, die mit jenen verglichen werden sollen, auch nur als klein anzusehen sein, d. h. die mit a_3 und b_3 multiplizierten Glieder sind klein gegen x und y. Daher darf man für die Linie $x = \text{const.}$ hinreichend genau setzen:

$$\mathfrak{x} = \text{const} + \frac{a_3}{6}(x^3 - 3xy^2) - \frac{b_3}{6}(3x^2y - y^3),$$
$$\mathfrak{y} = y.$$

Nunmehr ergibt sich die $\mathfrak{x}$-Komponente der Krümmung:

$$\frac{+\frac{d^2\mathfrak{x}}{d\mathfrak{y}^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\mathfrak{x}}{d\mathfrak{y}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -a_3x + b_3y.$$

Ganz ähnlich folgt aus $y = \text{const.}$:

$$\frac{+\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = +b_3x + a_3y.$$

Diese Komponenten werden gleichwertig den vom III. Teile des Refraktionsvektors herrührenden Krümmungskomponenten $\frac{\mathfrak{R}_x}{10^{10}}$ und $\frac{\mathfrak{R}_y}{10^{10}}$ einer Lichtkurve, wenn

$$a_3 = -\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y}\right)\frac{1}{2.10^{10}},$$
$$b_3 = +\left(\frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial x}\right)\frac{1}{2.10^{10}}$$

gesetzt wird. Welches Bild und welche Grösse die Verzerrungen eines trigonometrischen Netzes geben, lässt sich aus obigen Gleichungen zwischen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und x, y leicht herleiten, wenn die numerischen Werte der Grössen a_3, b_3 darin eingesetzt werden.

Es bleibt nun noch der IV. Teil des Refraktionsvektors übrig:

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{y}{2}\,\text{curl}_z\,\mathfrak{R},$$
$$\mathfrak{R}_y = +\frac{x}{2}\,\text{curl}_z\,\mathfrak{R}.$$

Auch hierfür ist eine Veranschaulichung durch Projektion möglich, wenn auch durch keine konforme. Es sei:

$$\mathfrak{x} = x - y\,s^2.\,c,$$
$$\mathfrak{y} = y + x\,s^2.\,c$$

Wie bei der vorigen Projektion kann man hier die Krümmungen einer Linie $x = \text{const}$ mit $\frac{\mathfrak{R}_x}{10^{10}}$ und die Krümmungen einer Linie $y = \text{const}$ mit $\frac{\mathfrak{R}_y}{10^{10}}$ vergleichen:

Aus $x = \text{const}$ folgt die Krümmung $-6cy$,

„ $y =$ „ „ „ „ $+6cx$.

Für $c = \frac{\text{curl}_z \mathfrak{R}}{12 \cdot 10^{10}}$ werden die Geraden des Systems x, y in erster Näherung im System $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ genau so abgebildet, wie sie durch den IV. Teil des Refraktionsvektors deformiert werden. Drückt man die

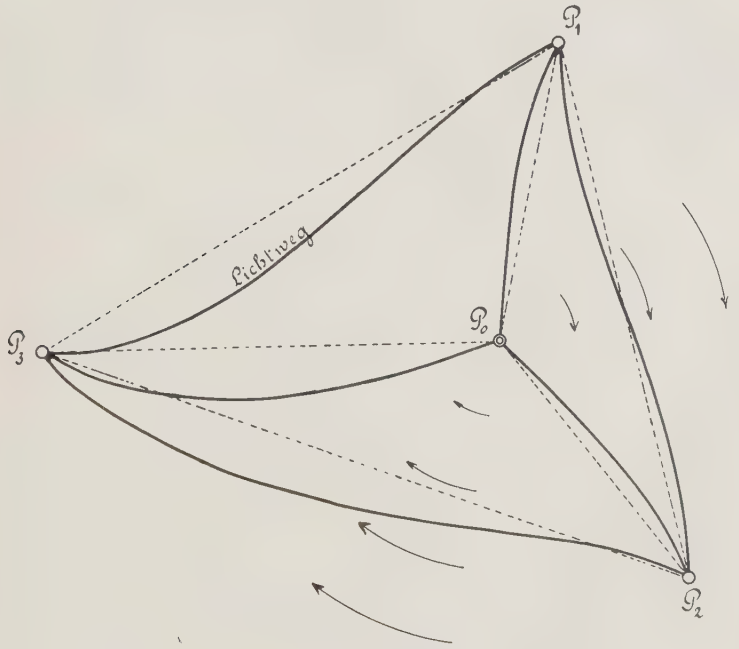

Fig. 10.

obigen Beziehungen zwischen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, und x, y in Polarkoordinaten $\varphi + \delta\varphi$, $s + \delta s$, bezw. φ, s aus, so folgt:

$$s\,\delta\varphi = \frac{s^3 \,\text{curl}_z \mathfrak{R}}{12 \cdot 10^{10}},$$

während die radialen Verschiebungen δs klein von höherer Ordnung

werden. $\mathrm{curl}_z\,\mathfrak{R}$ ist für den Koordinatennullpunkt zu nehmen. Für den (übertrieben grossen) Vektor

$$\mathfrak{R}_x = -y \,.\, 5\,,\ \mathfrak{R}_y = +x \,.\, 5,$$

bezw. für die Rotation des Vektors

$$\mathrm{curl}_z\,\mathfrak{R} = +10$$

sind die Wege der Lichtstrahlen zwischen den trigonometrischen Punkten P_0, P_1, P_2, P_3 in Figur 10 dargestellt. 10 km Länge entsprechen 1 cm der Zeichnung und einer Vektorgrösse 100000 entspricht 1 cm Pfeillänge.

§ 7. Das Refraktionspotential.

Es drängt sich jetzt die Frage auf, ob und wann der Refraktionsvektor ein Potential hat, und welche Folgerungen sich aus dem Vorhandensein eines Potentials ergeben. Bisher hat man die Ursachen der Refraktion fast ausnahmslos in Temperatur und Luftdruckunterschieden gesucht. In diesen Fällen ist stets ein Potential vorhanden.

Nach § 3 kann man schreiben:

$$\mathfrak{R}_x = 10^{10} \,.\, 0{,}000294\,\frac{273}{760}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\,\frac{1}{T} - \frac{B}{T^2}\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\mathfrak{R}_y = 10^{10} \,.\, 0{,}000294\,\frac{273}{760}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\,\frac{1}{T} - \frac{B}{T^2}\,\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Daraus ergibt sich sofort das Refraktionspotential:

$$U = 10^{10} \,.\, 0{,}000294 \,.\, \frac{273}{760}\,\frac{B}{T} + \text{const.}$$

Man kennt noch eine andere, aber unwichtige Ursache der Refraktion: den Wassergehalt der Luft. Mit Wasserdampf gesättigte Luft enthält ungefähr:

bei den Temperaturen	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$ C
Volumteile Wasserdampf v =	0,003	0,006	0,012	0,023	0,042.

Ist ε der Sättigungsgrad der Luft (volle Sättigung $\varepsilon = 1$) und beachtet man, dass der Brechungsindex n' des Wasserdampfes sich zum Brechungsindex n der Luft etwa verhält wie 1 : 1,00003, so wird infolge Luftfeuchtigkeit der Brechungsexponent der Luft verkleinert um:

$$\Delta n = 0{,}00003\, v\, \varepsilon.$$

Daraus folgt das Refraktionspotential:

$$U = -3 \,.\, 10^5\, v\, \varepsilon$$

und der Vektor

$$\mathfrak{R}_x = -3 \,.\, 10^5\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\, v,\quad \mathfrak{R}_y = -3 \,.\, 10^5\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\, v.$$

Streng genommen ist schon im § 1 bei der Herleitung des Refraktionsvektors stillschweigend vom Potentialbegriff ausgegangen worden. Auch ist der Begriff des Refraktionspotentials für bekannte Ursachen einleuchtend und fast selbstverständlich, so dass man damit einen grossen Teil der bisherigen Entwickelungen hätte einfacher herleiten können. Es liess sich aber kein triftiger Grund finden, den solenoidalen Vektor (wenn er auch zunächst nicht nachweisbar ist) von vornherein zu verleugnen und auszuschliessen, um so mehr, als er möglicherweise (was sich bei Seitenbedingungsgleichungen auch in der Tat ergab) eine Rolle in der Refraktionstheorie spielen konnte.

§ 8. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Der Inhalt des vorigen Paragraphen lässt sich so zusammenfassen: Alle Refraktionsursachen, die man bisher kennen gelernt hat, führen zu einem Potential. Es ist also die Gleichung curl $\mathfrak{R} = 0$ von selbst erfüllt, und daraus ergibt sich, wenn die höheren in $\mathfrak{R}$ (S. 17) vernachlässigten Glieder als so klein angesehen werden, dass sie nicht mehr bestimmbar sind, wenn also, was damit gleichbedeutend ist, der Begriff des grossen Refraktionsfeldes eine einfache Ansammlung von vielen kleinen Refraktionsfeldern nicht mit einschliesst, die interessante Tatsache: Grosse Refraktionsgebiete, die durch Temperatur-, Druck- oder Feuchtigkeitsunterschiede in der Atmosphäre bedingt sind, haben auf die Seitengleichungen eines trigonometrischen Netzes keinen messbaren Einfluss.

Es ist gezeigt worden, dass der Beitrag der Refraktion zur Bildung der Widersprüche von Winkelgleichungen den Faktor div $\mathfrak{R}$ und der zur Bildung von Seitengleichungswidersprüchen den Faktor curl $\mathfrak{R}$ hat. Daher ist die Bedingung dafür, dass ein Refraktionsfeld sich in den Netzbedingungen (mit Ausnahme der Bedingungen zwischen Basislinien) nicht äussert, gegeben durch: div $\mathfrak{R} = 0$ und curl $\mathfrak{R} = 0$. Mit Hilfe des Potentialbegriffes kann man diese beiden Bedingungen zusammenfassen in $\Delta U = 0$. Alle Lösungen von $\Delta U = 0$ und nur diese stellen Refraktionsfelder dar, die aus einer Triangulation allein nicht nachweisbar sind. Eine partikuläre Lösung der Gleichung $\Delta U = 0$ ist im § 4 als „homogenes Refraktionsfeld“ bereits behandelt worden.

Das Gesamtergebnis aus der Untersuchung grosser Refraktionsfelder kann man, wenn Temperatur-, Luftdruck- oder Feuchtigkeits-

unterschiede allein als Ursachen der Refraktion angesehen werden, zusammenfassen in:

Die Teile der Seitenrefraktion, welche ein trigonometrisches Netz als Ganzes deformieren, sind klein von der ersten Ordnung, diejenigen, welche die Winkelbedingungsgleichungen beeinflussen, klein von der zweiten Ordnung und diejenigen, die in die Seitengleichungen eingehen, wenigstens klein von der dritten Ordnung. Unter „Deformation des Netzes als Ganzes" ist z. B. die Krümmung langer Dreiecksketten zu verstehen, die zum Ausdruck kommt, wenn die Kette zur Berechnung einer geodätischen Linie dient, deren Endazimute astronomisch bestimmt sind. Ein Beispiel hierfür ist in § 5 gegeben. „Klein von der ersten Ordnung" sind Grössen, die den absoluten Betrag des mittleren Fehlers einer trigonometrischen Richtung wesentlich übersteigen; „klein von der zweiten Ordnung" sind solche, die den mittleren Richtungsfehler nicht erreichen, also etwa einige Zehntel Bogensekunden betragen, und „klein von der dritten und höheren Ordnung" sind alle diejenigen Grössen, die in keiner Weise praktisch bestimmbare Werte erreichen. (Vergleichsweise sind die Abrundungsfehler in den letzten Ziffern der Rechenwerte solche Grössen.)

Ob es auch Refraktionsursachen gibt, die kein Potential haben, für die der Einfluss auf die Seitengleichungen (der von der Rotation des Vektors abhängt) demnach klein von der zweiten Ordnung ist, mag vorläufig dahingestellt bleiben.

§ 9. Beispiel eines grossen Refraktionsfeldes.

Es möge ein Refraktionsfeld mit dem Potential

$$U = + 10^5 e^{-4.10^{-10} r^2} + U_\infty$$

vorhanden sein. r ist die Entfernung vom Zentrum. Man kann es sich z. B. durch ein grosses Wald- oder Sumpfgebiet verwirklicht denken, das auf die Luft abkühlend wirkt. In der Entfernung r vom Zentrum betrüge die Abkühlung t und die Temperatur T etwa:

r = 0 km	t = 10 °	T = 278,3 °
20	9	279,7
40	5	282,9
60	2	285,9
80	1	287,5
100	0	288,1
(∞)	(0)	(288,3)

Dieses Gebiet möge mit einem trigonometrischen Netz überspannt sein, das aus gleichseitigen Dreiecken mit 20 km Seitenlänge besteht. Welchen Einfluss hat die Refraktion auf das trigonometrische Netz?

Nach der Formel:

$$\delta w'' = \varrho'' \, 10^{-10} \, F \, \mathrm{div} \, \mathfrak{R} = -0{,}''57 \, (1 - 4 \cdot 10^{-10} \, r^2) \, e^{-4 \cdot 10^{-10} r^2}$$

erhält man die Verbesserungen, die den Dreieckswinkelsummen zuzufügen sind, um den Fehler der Refraktion wieder zu beheben. Es ist zweckmässig, r in 10 km Einheiten statt in m auszudrücken:

$$\delta w'' = -0{,}''57 \, (1 - 0{,}04 \, r^2) \, e^{-0{,}04 \, r^2}.$$

Die so berechneten Dreiecksverbesserungen sind in der nachfolgenden Figur 11 eingeschrieben. 1 cm der Zeichnung entspricht 10 km Länge. Der Vektor ist radial gerichtet und durch einige Pfeile angedeutet. 1 cm Pfeillänge ist der Einheit des Vektors gleichwertig. Man sieht, dass die grössten Verbesserungen der Dreieckschlussfehler keineswegs dort auftreten, wo die Refraktion am stärksten ist. Zur Berechnung einiger Richtungsfehler lege ich ein rechtwinkliges Koordinatensystem jeweilig so, dass die Richtung der Visur der + x-Richtung parallel läuft und der Koordinatennullpunkt im Zentrum des Refraktionsgebietes liegt. Im Anfangspunkt der Visur hat man dann die Vektorkomponente: $\mathfrak{R}_y = -0{,}8 \, y \, e^{-0{,}04 \, r^2}$ (die Längen in 10 km Einheit genommen) und in einem Punkte, der auf der Visur und in der Entfernung σ vom Anfangspunkt der Visur liegt:

$$\mathfrak{R}_1 = (-0{,}8 \, y \, e^{-0{,}04 \, r^2}) \, e^{-0{,}04 \, (\sigma^2 + 2 \, x \, \sigma)}.$$

x, y, r beziehen sich auf den Anfangspunkt der Dreiecksseite.

Nach teilweiser Reihenentwicklung:

$$\mathfrak{R}_1 = (-0{,}8 \, y \, e^{-0{,}04 \, r^2}) \, [1 - 0{,}04 \, (\sigma^2 + 2 \, x \, \sigma)]$$

darf $\mathfrak{R}_1$ in das Integral Seite 6 eingesetzt werden:

$$\delta\varphi'' = \varrho'' \frac{10^{-6}}{s}\left(-0{,}8\, y\, e^{-0{,}04\, r^2}\right)\left(\frac{s^2}{2} - 0{,}08\,\frac{x\, s^3}{6} - 0{,}04\,\frac{s^4}{12}\right)_0^{s=2}$$

$$= -0{,}''165 y e^{-0{,}04\, r^2}\left[1 - 0{,}053\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$$

(Alle Längen sind in 10 km Einheiten zu verstehen.)

Für eine Visur in der entgegengesetzten Richtung von x, y aus kehren x und y das Vorzeichen um; daher ist die Verbesserung eines gestreckten Winkels:

$$\delta\omega'' = 0{,}165\,|y|\, e^{-0{,}04\, r^2}\left(\left[1 - 0{,}053\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] + \left[1 - 0{,}053\left(-x + \frac{1}{2}\right)\right]\right)$$

$$= 0{,}''32\, y\, e^{-0{,}04\, r^2}.$$

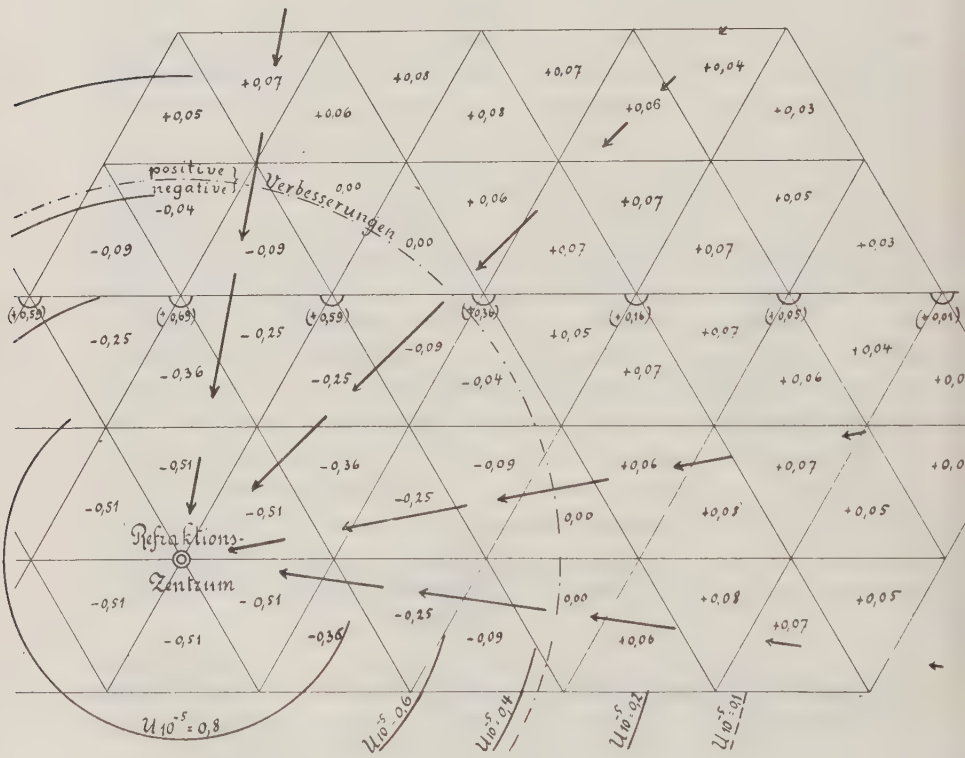

Fig. 11.

Einige dieser Verbesserungen sind ebenfalls in der Skizze eingetragen. Man erkennt durch Addition dieser Verbesserungen $\delta\omega$, dass der Fehler der geodätischen Übertragung eines astronomisch gemessenen Azimutes im vorliegenden Falle bis zu 3,"0 betragen kann.

§ 10. Kleine Refraktionsfelder.

Geht man zu Refraktionsfeldern von kleinem Umfange über, so werden sich die verschiedenen Grössenordnungen der erzeugten Fehler ausgleichen. Die Fehler der Winkel- und Seitengleichungen werden wachsen, die Deformation des Netzes als Ganzes wird vielleicht abnehmen. Schon in dem obigen Beispiel ist die Einschränkung des Refraktionsgebietes nicht ohne Einfluss. Die strenge Berechnung einiger Verbesserungen von Dreiecksschlussfehlern gibt in Sekunden:

$$-0{,}500 \quad -0{,}350 \quad -0{,}244 \quad -0{,}074;$$

dagegen liefert die Formel $10^{-10}\,\mathrm{F}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{R}$:

$$-0{,}514 \quad -0{,}363 \quad -0{,}247 \quad -0{,}088.$$

Die Theorie mittlerer und kleiner Refraktionsfelder unterscheidet sich von jener grosser Felder dadurch, dass die abgekürzte Reihenentwickelung der Vektorkomponenten nicht mehr zulässig ist. Es kommt aber neu hinzu die zeitliche Änderung der Refraktionsfelder, und zwar in um so stärkerem Masse, je kleiner diese sind. Z. B. bringen die Berg- und Talwinde oder die Land- und Seewinde, die stets in den unteren Teilen der Atmosphäre von kälteren Gegenden zu wärmeren strömen, Refraktionsfelder hervor, in denen mit den täglich zweimal wechselnden Windrichtungen die Vektorkomponenten ihr Vorzeichen umkehren. Da in einer späteren Fortsetzung der vorliegenden Arbeit die zeitlich veränderlichen Felder ausführlich behandelt werden sollen und ferner, weil der besondere Zweck dieser Abhandlung eine Einschränkung des Umfanges wünschenswert macht, so darf wohl hier über die mittleren und kleinen Felder rasch hinweggegangen werden.

Die äusserste Kleinheit eines Refraktionsgebietes äussert sich durch einen Knick im Lichtstrahl. Wenn beispielsweise ein Lichtstrahl von 50 km Länge in der Nähe einer Hausfront von 50 m Länge vorbeigeht, so ist es denkbar, dass durch die Wärmeausstrahlung oder -absorption des Hauses eine Änderung der Luftdichte in seiner nächsten Umgebung und damit eine Brechung des Lichtstrahles stattfindet. In Anbetracht des grossen Lichtweges ist aber diese Brechung als Knick im Lichtstrahl genau genug gekennzeichnet. Sieht man die grossen Refraktionsfelder als Extrem an, so ist hier offenbar das entgegengesetzte Extrem gegeben. Als Ursache solcher kleiner Felder dürfte die Temperaturverteilung allein verantwortlich zu machen sein (wenn man sich auf bekannte Refraktionsursachen beschränkt). In Betracht kommen neben der Nachbarschaft von

Häusern, Bäumen usw. die vertikalen Luftströmungen, die wärmere Luft aus den unteren Regionen in die Visurhöhe bringen. Am aufsteigenden Rauch der Schornsteine ist dieser Vorgang beispielsweise direkt sichtbar. Weiter sind es kleine Seen, Teiche, Wälder usw., über denen sich Luftkegel auftürmen, deren Temperatur eine geringere tägliche Periode hat, als die Luft der weiteren Umgebung.

§ 11. Entstehung und Existenz von Refraktionsfeldern.

Die Einführung des Begriffes der Refraktionsvektorfelder erfordert den Nachweis ihrer Existenz. Es wäre wohl das einfachste, einige grosse Felder nach meteorologischen Daten rechnerisch festzulegen. Im allgemeinen geht das aber nicht. Einmal sind die meteorologischen Stationen in der Regel zu weit voneinander entfernt, um Temperaturunterschiede (wie sie z. B. die Land- und Seewinde hervorbringen) hinreichend genau darzustellen, und zweitens lassen sich die Thermometerangaben nicht genau genug auf gleiche Höhe reduzieren. Der zu dieser Reduktion nötige Temperaturgradient der Höhe beträgt nach Hann 0,°57 auf 100 m im Gebirge und aus Ballonfahrten Glaishers 0,°76 bezw. 0,°62 in freier Atmosphäre (vergl. Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Aufl., Bd. 2, Seite 180), während Assmann und Berson in den „Ergebnissen der Arbeiten am Aeronautischen Observatorium 1903 und 1904“ nur 0,°37 bis 0,°50 Temperaturabnahme mit der Höhenzunahme von 100 m finden. Auch ist zu bemerken, dass bei den meteorologischen Beobachtungen von anderen Gesichtspunkten ausgegangen wird und es deshalb verständlich ist, dass sie dem vorliegenden Zweck im allgemeinen wenig nützen und sogar zu irrigen Schlüssen führen können. Als ein Beispiel hierfür mögen folgende Angaben aus dem „Meteorologischen Jahrbuch für 1900“ dienen:

	Temperatur um 9 Uhr abends im			Meereshöhe	Höhe des Thermometers über dem Erdboden
	Juli	August	Sept.	m	m
Berlin S, Teltowerstr. 8	20,8°	18,7°	15,3°	49	13,5
„ NE, Friedenstr. 11	19,8	17,6	14,7	59	14,5
„ N, Invalidenstr. 42	20,5	18,5	15,1	51	15,6
„ NW, Seestrasse	18,8	17,1	13,4	40	2,1
Blankenburg b. Berlin	18,3	16,1	13,3	51	2,0

Das gäbe, oberflächlich betrachtet, ein vorzügliches Material zur Darstellung eines Vektorfeldes. Da sich die Temperaturen aber leider auch als lineare Funktion der Höhe der Thermometer über dem Erdboden ziemlich gut darstellen lassen und es an allen Mitteln fehlt, um sie auf gleiche Höhe zu reduzieren (den oben genannten mittleren Höhengradienten auf die untersten Luftschichten anzuwenden, wäre natürlich verfehlt), so sind diese Angaben nicht beweiskräftig genug, um das Vorhandensein eines Vektorfeldes glaubhaft zu machen. Man wird deshalb auf die mathematische Darstellung von Refraktionsfeldern nach den bisherigen meteorologischen Daten im allgemeinen verzichten und sich auf vereinzelte brauchbare meteorologische Beobachtungen beschränken müssen, um das Bestehen solcher Refraktionsfelder nachzuweisen.

Wertvolle Angaben über Temperatur- und Luftdruckverteilungen finden sich in Hanns Atlas der Meteorologie. Sämtliche Isothermen- und Isobarenkarten stellen eigentlich Refraktionsfelder von enormer Ausdehnung dar. Man könnte nach ihnen direkt die Linien gleichen Vektorpotentials einkonstruieren. Leider gibt dieses Werk immer nur Mittelwerte und es fehlt an Karten, welche einen Überblick über die Temperaturverteilungen zu bestimmten Tagesstunden verschaffen könnten.

Im „Handbuch der Klimatologie“ von Hann, Stuttgart 1883, Seite 111, findet man eine Zeichnung der mittleren Isothermen und Isobaren im Juli auf der Pyrenäenhalbinsel. Im Innern des Landes ist die Temperatur durchschnittlich 8^0 höher als an der Küste. Im Norden Spaniens geht das zeitlich mittlere Temperaturgefälle bis zu 1^0 auf 24 km, im Süden bis zu 1^0 auf 11 km. Nach Seite 94 desselben Werkes gehen die täglichen Schwankungen an der Küste bis zu $6,^0 6$ und im Innern bis zu $14,^0 5$. Das gibt ebenfalls wieder einen Unterschied von rund 8^0, so wie es die Durchschnittstemperaturen im Juli zeigen. Man darf daher schätzen, dass das horizontale Temperaturgefälle im Durchschnitt für Juli im Norden bis 1^0 auf 12 km und im Süden bis 1^0 auf 6 km steigt.

Nach Seite 113 der genannten Klimatologie befand sich im Januar 1880 in Dänemark ein Temperaturminimum. Das mittlere Temperaturgefälle an den Küsten betrug landeinwärts etwa 1^0 auf 20 km. Über die hinzukommenden täglichen Schwankungen ist nichts angegeben.

In den „Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie“ 1907, Seite 113, hat Max Kaiser über „die Land- und Seewinde an der deutschen Ostseeküste“ Angaben gemacht. Es finden sich auch einige Notizen über die Küstentemperaturen von Neuengland. Das weiteste Vordringen der Seewinde landeinwärts beträgt 16 bis 32 km. Die täglichen grössten Temperaturdifferenzen zwischen Land und Meer an Seebrisentagen bei Swinemünde gibt Kaiser im Durchschnitt aus 20 mitgeteilten Einzelwerten zu $5{,}^{0}7$ C an. Der Maximalwert beträgt (am 1. VI. 1904) $10{,}^{0}9$. Die Seestation (Adlergrund) liegt etwa 100 km nördlich von der Landstation (Wustrow bei Swinemünde). Welches Temperaturgefälle an der Küste herrscht, ist daraus zwar nicht zu erkennen, aber man darf wohl annehmen, dass es grösser ist als auf der See, dass es also mehr als 1^{0} auf 17 km beträgt. Da die Seebrise etwa 3 bis 5 Seemeilen vom Ufer entfernt einsetzt, so wird man vielleicht annehmen dürfen, dass die Lufttemperatur auf See bis zu dieser Entfernung vom Lande ungefähr gleich bleibt und in den 6 km, die vom Seewind beherrscht werden, um 1^{0} auf 1 km landeinwärts fällt. Wegen des Fehlens ausreichender meteorologischer Daten klagt der Verfasser: „Leider ist es unmöglich, nun umgekehrt das Vordringen der Seebrise landeinwärts zu verfolgen“.

In den „Annalen der Hydrographie 1906, Seite 182, erwähnt Dr. K. Graff einen Fall seitlicher Strahlenbrechung, durch den das Bild eines sonst unsichtbaren Felsens so weit seitlich verschoben wurde, dass es gesehen werden konnte.

Einige zuverlässige Daten über horizontale Temperaturgefälle erhält man aus gleichzeitigen Ballon- oder Drachenaufstiegen. Z. B. sind in den „Ergebnissen der Arbeiten am Aeronautischen Observatorium 1903/1904“ für die beiden Stationen Seestrasse und Reinickendorf, Aeronautisches Observatorium, die eine gegenseitige Entfernung von 2 km haben, in 40 m über dem Erdboden die Monatsmittel der Temperatur (abgeleitet aus je etwa 30 Einzelbestimmungen) angegeben. Der Temperaturunterschied in dieser Höhe zwischen beiden Stationen betrug z. B. im Februar und März 1903 $0{,}^{0}8$ im Oktober 1903 $1{,}^{0}2$ im August 1904 $1{,}^{0}4$. Man hat es also hier mit einem horizontalen Temperaturgefälle von der Grössenordnung 1^{0} auf 2 km zu tun, was bei einer absoluten Mitteltemperatur von 283^{0} einen Refraktionsvektor von der Grösse 5 liefert.

Einen Aufschluss über horizontale Temperaturgefälle geben auch die barometrischen Höhenmessungen. Bauernfeind hat in dem

Heft „Neue Beobachtungen über die tägliche Periode barometrisch bestimmter Höhen", München 1883, hochinteressante Mitteilungen über die zeitlich veränderlichen barometrischen Messungsergebnisse gemacht. Nach Bauernfeind rühren die Höhenschwankungen von den fehlerhaften Thermometerangaben her, die durch Bodenstrahlung gefälscht werden. Nun, wörtlich darf man das nicht verstehen, es wäre dann unverantwortlich, dass man die Thermometer gegen die Wärmestrahlen des Bodens nicht geschützt hat. Auch könnte eine solche Strahlung immer nur zu grosse Temperaturangaben verursachen, aber niemals zu kleine. Man wird sich den Einfluss so zu denken haben, dass die Wärmeabgabe des Bodens, die durch langwellige Wärmestrahlen erfolgt, von der untersten Luftschicht aufgenommen wird. Durch Mischung mit den anderen Luftteilchen wird dann die Wärme allmählich zu grösserer Höhe (durch sogenannte Konvektionsströmung) hinaufbefördert. In der freien Atmosphäre fehlt eine starke, nach der Tageszeit veränderliche Wärmezufuhr, und deshalb müssen die Flächen gleicher Temperatur in den Mittagsstunden gegen den Berg ansteigen und sich des Nachts am Bergabhange senken. Es gelingt, aus den Bauernfeindschen Beobachtungen direkt herauszurechnen, um wieviel die Thermometerangaben der einzelnen Stationen korrigiert werden müssten, damit die Höhenschwankungen, die in Wirklichkeit nicht bestehen, aus dem Rechenergebnis verschwinden. Bauernfeind hat auf den Stationen

Höhensteig	in Meereshöhe	484	m
Irschenberg	„ „	753	„
Kampenwand	„ „	1564	„

je 340 barometrische Höhenbestimmungen in halbstündlichen Intervallen ausführen lassen. Bezeichnet T_1 die Temperatur (in Reaumurgraden) auf der einen Station, T_2 die auf der anderen und h den Höhenunterschied, so beginnt die Bauernfeindsche barometrische Höhenformel mit:

$$\log h = \log [1{,}0025 + 0{,}0023\,(T_1 + T_2)] + \ldots .$$

Hieraus folgt die Differentialbeziehung zwischen h und T:

$$\frac{\delta h}{h} = (\delta T_1 + \delta T_2)\,\frac{0{,}0023}{1{,}0025 + 0{,}0023\,(T_1 + T_2)}.$$

Auf $\pm 3^0$ genau findet man durch Schätzung mittlere Werte $T_H = 14^0$, $T_K = 10^0$, $T_I = 14^0$. Die Indexe bezeichnen die Stationen. Rechnet man nach Celsiusgraden und schreibt dann t statt T, so erhält man für die Höhenschwankungen zwischen den drei Stationen die Gleichungen:

$+$ Kampenwand—Höhensteig $\delta h_{HK} = (\delta t_H + \delta t_K)\ 1{,}87,$
$+$ Irschenberg—Höhensteig $\delta h_{HI} = (\delta t_H + \delta t_I)\ 0{,}46,$
$+$ Kampenwand $-$ Irschenberg $\delta h_{IK} = (\delta t_I + \delta t_K)\ 1{,}41.$

Für δt möge allgemein gesetzt werden:

$$\delta t = (x + \xi H)\cos(15\nu)^0 + (y + \eta H)\sin(15\nu)^0 + (z + \zeta H).$$

H ist die Meereshöhe in Metern; ν bezeichnet die Tagesstunde, von Mitternacht an gezählt. Setzt man δt für jede Station oben ein und fügt jedem einzelnen Höhenunterschied noch einen unvermeidlichen Messungsfehler bei, so erhält man insgesamt $3 \cdot 48 = 144$ Fehlergleichungen und daraus ein System von 6 Normalgleichungen die indes in drei Gruppen zerfallen. Von der Verschiedenheit der Gewichte der halbstündlichen Mittelwerte (= der Zahl der Messungen, die zur betreffenden Tagesstunde ausgeführt worden sind) wurde der Einfachheit halber abgesehen. Das Ergebnis ist, wenn $\tau = -\delta t$ die Verbesserung der Thermometerangaben zur Tagesstunde ν in Celsiusgraden darstellt:

$$\tau = [6{,}0 \pm 0{,}8 - (0{,}0020 \pm 0{,}0004)\,H]\cos(15\nu)^0$$
$$+[-0{,}5 \pm 0{,}8 + (0{,}0011 \pm 0{,}0004)\,H]\sin(15\nu)^0 + [1{,}2 \pm 0{,}6 - (0{,}0012 \pm 0{,}0003)\,H$$

Da x und ξ, y und η, z und ζ eng miteinander verbunden sind, so erhält man wesentlich geringere mittlere Fehler, wenn τ für eine bestimmte Höhe, z. B. $H = 500$ m gerechnet wird:

$$\tau_{500} = (5{,}0 \pm 0{,}2)\cos(15\nu)^0 + (0{,}0 \pm 0{,}2)\sin(15\nu)^0 + (0{,}6 \pm 0{,}2).$$

Nebenbei sei erwähnt, dass die Temperaturdifferenz zwischen Höhensteig und Kampenwand auch gerechnet worden ist. Es ist:

$$t_K - t_H = +2{,}7\cos(15\nu)^0 + 1{,}1\sin(15\nu)^0 - 6{,}0,$$

und hieraus ergibt sich die Temperaturzunahme mit der Höhe für 100 m Höhendifferenz:

$$100\,\frac{dt}{dh} = +0{,}25\cos(15\nu)^0 + 0{,}10\sin(15\nu)^0 - 0{,}56.$$

Der Höhengradient schwankt hiernach zwischen $0{,}^0 29$ und $0{,}^0 83$. Der mittlere Wert, $0{,}^0 56$, stimmt dagegen gut zu Hanns Angabe von $0{,}^0 57$.

Zur Verwertung der Temperaturverbesserung τ ist noch eine Hypothese nötig: Es soll angenommen werden, dass der Luftdruck im Gebirge und in freier Luft in gleicher Höhe derselbe ist. Ganz genau kann das allerdings nicht zutreffen. Da der Luftdruckunterschied aber ganz sicher nur wenige mm Quecksilberdruck betragen

wird, die ermittelten scheinbaren Höhenschwankungen aber durch Luftdruckverschiedenheit nur dann erklärt werden könnten, wenn der Luftdruck im Gebirge und in gleicher Höhe in der freien Atmosphäre um 15 mm Unterschied schwanken würde, so ist die gemachte Annahme in erster Näherung berechtigt. Noch unbedenklicher ist die Annahme, dass die Luftfeuchtigkeit in gleicher Höhe überall die gleiche sei. Auf barometrische Höhenmessungen hat diese sowieso nur einen untergeordneten Einfluss.

Mit diesen Annahmen stellt sich die Verbesserung τ dar als die Reduktion der Gebirgstemperatur auf die Temperatur der freien Atmosphäre in gleicher Höhe. Wird angenommen, dass das horizontale Temperaturgefälle höchstens die Hälfte des vertikalen betragen kann, also etwa $0,^{0}3$ auf 100 m, so folgt, dass es bei einem maximalen Wert von $\tau = 6^{0}$ wenigstens 2 km weit horizontal in die freie Luft hinein reichen muss. Sicher wird das Temperaturgefälle am Gebirge am stärksten sein und weiter nach der freien Luft zu abnehmen, etwa so, dass man in erster Näherung einem Orte in der horizontalen Entfernung x vom Gebirge die Temperaturkorrektion τe^{-xc} beilegen muss, um die Temperatur der freien Atmosphäre $(x = \infty)$ zu erhalten. Es wird also im Maximum $\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = 0,^{0}003$ anzusetzen sein. Zur Bestimmung von c folgt hieraus am Gebirge rund: $6c = 0,003$ oder $c = 0,0005$. Damit wird:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{+\tau}{2000} e^{\frac{-x}{2000}} = 0,0025 \cos(15\nu)^{0} e^{\frac{-x}{2000}}$$

für 500 m Meereshöhe. Das entspricht einem Refraktionsvektor von:

$$25 \cos(15\nu)^{0} e^{\frac{-x}{2000}}$$

und liefert in 5 km Entfernung vom Gebirge immer noch einen Vektor von der maximalen Grösse 2 und in 10 km Entfernung einen solchen von 0,17.

Mag auch der Nachweis von Refraktionsfeldern aus barometrischen Höhenmessungen etwas Hypothetisches an sich haben, so wird dieser Nachweis grosser horizontaler Temperaturgradienten doch nicht als ganz unberechtigt bezeichnet werden können. Wenn man das Gesetz der Temperaturabnahme mit der Höhe in der freien Atmosphäre besser kennen würde, so liessen sich barometrische Höhenmessungen zur vollständigen Konstruierung der Niveauflächen gleicher Luftdichte vorzüglich verwerten.

§ 12. Refraktionsstreuung.

Ist das Refraktionsgebiet bekannt, so folgt ohne Schwierigkeit die Refraktionsverbesserung $\delta\varphi$, die man einer trigonometrischen Visur beilegen muss, um den Refraktionseinfluss zu beseitigen. Häufig genug wird es aber vorkommen, dass sich die Refraktionsfelder in keiner Weise feststellen lassen. Das gilt z. B. von den rasch veränderlichen Feldern (etwa den Luftschlieren über einem erhitzten Dache), dann aber namentlich von den kleinen Refraktionsfeldern, die der Feststellung mittelst Temperaturmessungen etc. unzugänglich sind. Im allgemeinen werden kleine Refraktionsfelder zufällig über das ganze Gebiet der Triangulation verteilt sein und dann auch, wenn viele „Knicke" im Lichtstrahl angenommen werden, die ihn bald nach der einen Seite, bald nach der anderen abbiegen, wie zufällige Messungsfehler wirken. Um das mathematisch strenger fassen zu können, muss man u. a. voraussetzen: 1. die Knicke im Lichtstrahl erzeugen mit gleicher Wahrscheinlichkeit positive als negative Richtungsfehler, 2. die Knicke von der Grösse α haben im Intervall α bis $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ die Wahrscheinlichkeit $W(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$ für sich, resp. kommen mit der Häufigkeit $W(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$ const. vor. Benutzt man die Bezeichnungen

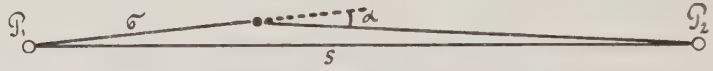

Fig. 12.

der Figur 12, so wird ein bestimmter Knick α in der Entfernung σ vom Ausgangspunkt P_1 einer Visur nach P_2 einen Visurfehler in P_1 von $\alpha \cdot \frac{s-\sigma}{s}$ verursachen. Da α mit gleicher Wahrscheinlichkeit positiv als auch negativ vorkommt, so wird das Quadrat des mittleren Visurfehlers in P_1 vergrössert werden um den Betrag $\alpha^2 \cdot \left(\frac{s-\sigma}{s}\right)^2$. Nun ist im Intervall α bis $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ die Häufigkeit der Knicke $W(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$. const. und im Intervall σ bis $\sigma + \mathrm{d}\sigma$ ist sie $\mathrm{d}\sigma$. const.; daher erhält man insgesamt für den ganzen Lichtweg und für alle möglichen Grössen α eine Vergrösserung des Quadrates des mittleren Fehlers einer Richtung von P_1 nach P_2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 W(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \int_0^s \left(\frac{s-\sigma}{s}\right)^2 \mathrm{d}\sigma \,.\, \text{const.} = s \,.\, \text{const.}$$

Es ist also die Zunahme des Quadrates des mittleren Richtungsfehlers infolge kleiner, unbestimmbarer (oder nicht bestimmter) Refraktionsfelder proportional der Länge der Visur zu setzen. Diese Zunahme des mittleren Fehlerquadrates möge mit $\Delta\varphi^2$ bezeichnet werden. Wegen des wesentlich verschiedenen Charakters der Refraktionsverbesserung $\delta\varphi$ und der soeben definierten Grösse $\pm\Delta\varphi$ soll der zufällige, unvorhergesehene Refraktionsfehler $\pm\Delta\varphi$ im folgenden mit Refraktionsstreuung bezeichnet werden.

Grosse Vektorfelder geben im allgemeinen nur eine Refraktionsverbesserung. Erst nachdem man ein mathematisch dargestelltes mittleres Feld (z. B. ein homogenes) vom Gesamtfeld abgezogen hat, kann man die Reste des Refraktionsfeldes, wenn sie sich nicht zuverlässig durch mathematische Formeln beschreiben lassen, als Streuung behandeln. Kleine Felder geben auch nicht notwendig eine Streuung. Nur wenn ihr Vorkommen rein zufälligen Charakter hat, und wenn es nicht möglich ist, sie durch Messung und Rechnung darzustellen, wird man ihren Einfluss auf trigonometrische Richtungen als Streuung bezeichnen können.

Der zufällige Charakter der Streuung bringt es mit sich, dass diese weit weniger schädlich ist, als die Refraktionsverbesserung. Z. B. wird die geodätische Übertragung von astronomischen Azimuten durch Refraktionsfehler direkt gefälscht, durch Refraktionsstreuung aber nur in ihrer Genauigkeit beeinträchtigt.

§ 13. Weitere Aufgaben der Refraktionstheorie.

Ausser der gegebenen Theorie des Refraktionsvektors, der grossen Refraktionsfelder und der Refraktionsstreuung wären noch die Zimmerrefraktion, resp. die lokale Refraktion am Beobachtungsorte, die Änderung der Refraktion mit der Höhe über dem Erdboden und das interessante Gebiet der zeitlich veränderlichen Refraktionsfelder zu behandeln. Auch sind mit Temperatur-, Luftdruck- oder Feuchtigkeitsunterschieden der Atmosphäre die Ursachen der Refraktion möglicherweise noch nicht erschöpft. Es wäre denkbar, dass es noch andere unbekannte Ursachen gibt. Bei Höhenmessungen ist eine derartige Frage von geringer Bedeutung, weil die bekannten Ursachen schon so grosse Brechungserscheinungen geben, dass weitere Ablenkungen um vielleicht Bruchteile einer Bogensekunde nicht wesentlich ins Gewicht fallen. Bei der Seitenrefraktion hat man dagegen überhaupt nur mit Grössen zu rechnen, die meist unter 1″ bleiben.

Die Physik macht es sehr wahrscheinlich, fast gewiss, dass das Licht elektromagnetischer Natur ist. Mit dieser Erfahrung wird die Bahn eines Lichtstrahles sofort in Beziehung gesetzt zu allen magnetischen und elektrischen Eigenschaften des durchstrahlten Raumes und der durchstrahlten Luftmasse und zu allen elektrischen und magnetischen Vorgängen in diesen. Um nur einiges aufzuzählen: Der Feuchtigkeitsgehalt der Luft bewirkt eine Erhöhung der Leitfähigkeit. Es muss sich daher zuweilen ein Gradient der Leitfähigkeit ausbilden, und dieser bewirkt die Ablenkung elektromagnetischer Wellen oder, was hier in Betracht kommt, der Wellen, die wir als Licht empfinden. Ebenso ist die Nachbarschaft elektrischer Leiter von Belang (bei Kimmtiefenmessungen kann dieser Umstand vielleicht auch für Höhenrefraktionen wesentlich sein). Das oft enorm hohe elektrische Potentialgefälle der Luft kann möglicherweise auch zur Bahn des Lichtstrahles in Beziehung stehen, ebenso das erdmagnetische Feld. Wenn auch die Maxwellsche Theorie nur eine einfache Übereinanderlagerung der Lichtwellen und der statischen Felder gibt, so ist nach der Elektronentheorie doch ein innigerer Zusammenhang konstruierbar. In wenigen, besonderen Fällen würde man dahingehende Untersuchungen auch im Laboratorium experimentell durchführen können.

Endlich bleibt noch die Frage zu beantworten, auf welchem Wege die Refraktionen aus Winkelmessungen eliminiert werden können; beispielsweise, ob die täglichen Refraktionsveränderungen sich durch ein Gesetz darstellen lassen und dann durch Messungen zu bestimmten Tages- oder Nachtstunden eliminiert werden können (wie es z. B. in der Meteorologie zur Auffindung der täglichen Durchschnittstemperaturen durch Terminbeobachtungen geschieht), oder ob sie durch eine geeignete Beobachtungsmethode vermieden oder berechnet und unschädlich gemacht werden können, oder ob sich die Refraktionsfelder direkt bestimmen lassen.

Auf diese weiteren Aufgaben der Refraktionstheorie soll aber hier nicht eingegangen werden.

§ 14. Nachweis der Seitenrefraktion in einzelnen Richtungsmessungen und in trigonometrischen Netzen.

In fast allen bisherigen Studien über Seitenrefraktion steht die Frage an der Spitze: Wo zeigt sich in trigonometrischen Netzen ein Vorhandensein seitlicher Strahlenbrechung? Diese Frage einwandfrei

zu beantworten, ist nicht leicht. Gibt es doch sogar Seitenrefraktionen, die ihr Dasein bei Berechnung der trigonometrischen Netze in keiner Weise verraten! Auch können Zielfehler, Instrumentalfehler, Lotabweichungen und dergl. mehr die Horizontalwinkelmessungen in einer Form beeinflussen, die geeignet ist, das Vorhandensein seitlicher Strahlenbrechung irrigerweise wahrscheinlich zu machen.

Man muss die Untersuchungen trennen nach der Grösse der Refraktionsgebiete. Es ist gezeigt worden, dass grosse Felder nur durch kleine Glieder 2. und 3. Ordnung auf die Netzbedingungen (also auch auf die Ausgleichungsfehler) wirken. Aus der absoluten Grösse der Schlussfehler ist daher kaum ein grosses Refraktionsfeld auffindbar, höchstens aus dem Vorherrschen eines Vorzeichens. Es möge das durch eine kleine Rechnung verdeutlicht werden.

Für die mittleren Dreiecksschlussfehler $\pm 1''$ (entsprechend einem mittleren Winkelfehler $\pm 0,''58$) ist unter 100 Dreiecksschlüssen im allgemeinen zu erwarten, dass etwa $\frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon$ Fehler zwischen $+x$ und $+\infty$ fallen. Tritt zu den Schlussfehlern noch der positiv angenommene Refraktionsfehler $+\mu$ (in Bogensekunden ausgedrückt) hinzu, so ist z. B. die wahrscheinlichste Häufigkeit positiver Schlussfehler gegeben durch

$$\frac{100}{\sqrt{2\pi}} \int_{0-\mu}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon = W$$

und die wahrscheinlichste Häufigkeit negativer Schlussfehler durch $100 - W$. Der mittlere Messungsfehler $m = \pm 1''$ wird dadurch erhöht auf $m' = \pm\sqrt{1+\mu^2}$. Seine eigene Unsicherheit ist (wenn die Werte μ ebenfalls als schwankend gedacht werden) etwa $\frac{m'}{\sqrt{2n}} = \frac{m'}{\sqrt{200}}$.

Einige Zahlenwerte sind:

μ	W	100 — W	m'	$\frac{m'}{\sqrt{200}}$
0,0″	50	50	±1″	±0,07″
0,2	58	42	±1,02	±0,07
0,4	66	34	±1,08	±0,08
0,6	73	27	±1,17	±0,08
0,8	79	21	±1,28	±0,09
1,0	84	16	±1,41	±0,10

Man sieht, dass für $\mu = 0,''6$ (was für ein grosses Refraktionsgebiet schon hoch ist) die Zunahme des mittleren Fehlers $m' - m$ bei wenigstens 100 Dreiecksschlüssen gerade noch erkennbar wäre, wenn sonst keine anderen Störungen, also namentlich keine Refraktionsstreuung vorhanden, die Berechnungen des mittleren Fehlers einwandfrei wären und der mittlere reine Messungsfehler eines Winkels $\pm 0,''58$ nicht überstiege. Dagegen ist das Verhältnis der positiven zu den negativen Schlussfehlern $= 73 : 27$ sehr viel deutlicher ausgeprägt. Schon bei verhältnismässig schwacher Refraktion kann man hieraus einen sicheren Schluss auf das Vorhandensein grosser Refraktionsfelder ziehen.

Gute Beispiele hierfür sind in der „Europäischen Längengradmessung in 52° Breite" Heft I von F. R. Helmert enthalten. Im englischen Kanalnetz, das sich zuerst darbietet, ist das Vorherrschen eines Vorzeichens geradezu typisch: von 16 eingeschriebenen Dreiecksschlussfehlern sind in 12 zusammenhängenden Dreiecken die Vorzeichen negativ. Im darauffolgenden französischen Kanalnetz findet sich unter 8 Dreiecksfehlern eine Gruppe von 5 zusammenliegenden negativen Dreiecksabschlüssen. Auffallender wird die Beeinflussung durch grosse Refraktionsfelder noch, wenn man beide Netze vergleicht: von den 8 identischen Dreiecken haben die Dreiecksabschlüsse in 7 Dreiecken das gleiche Vorzeichen. Das belgisch-deutsche Verbindungsnetz enthält in 10 eingeschriebenen Schlussfehlern 8 positive. Im hessischen Netz enthält die von Feldberg-Dünsberg-Hasserod bezw. Herkules-Meissner-Inselsberg begrenzte mittlere Partie unter 11 eingeschriebenen Schlussfehlern 9 negative, und die 4 Dreiecke, welche sich aussen anschliessen, haben positive Abschlüsse. Der preussisch-russische Anschluss bei Tarnowitz enthält unter 7 Dreiecken 6 mit negativem Abschluss.

In der Veröffentlichung des Geodätischen Institutes: „Das Märkisch-Thüringische Dreiecksnetz", Seite 67, finden sich Gruppen von 9 bezw. 6 Dreiecken zusammengestellt, die bezw. positive und negative Abschlüsse zeigen.

Es würde keinerlei Schwierigkeiten bieten, noch viele andere Beispiele anzuführen, da die meisten grösseren Triangulierungen Gruppen von Dreiecksschlussfehlern gleichen Vorzeichens aufweisen.

Nachdem grosse Refraktionsfelder durch das Vorhandensein von kleinen Fehlern 2. Ordnung ihr Bestehen verraten haben, liegt das Verlangen nahe, ihren Einfluss auch in den Gliedern 1. Ordnung zu

suchen. Diese treten auf, wenn eine geodätische Linie (resp. das zu ihrer Berechnung dienende Dreiecksnetz) durch ein grosses Refraktionsfeld hindurchgeht, und wenn die Azimute an den Endpunkten astronomisch bestimmt sind. Man wird sie also in den Laplaceschen Gleichungen der Lotabweichungen suchen müssen. Hier handelt es sich allerdings um Grössen 1. Ordnung. Ein Rückschluss auf Refraktion wird aber doch nicht immer zuverlässig sein, weil zur Bildung der Laplaceschen Gleichungen viele Messungen verschiedener Art mitwirken, so dass die Annahme, die trigonometrischen Netze mit ihren Refraktionsfehlern seien die einzige Ursache grosser Schlussfehler der Laplaceschen Gleichungen, nicht immer einwandfrei ist.

In „Lotabweichungen Heft II“ findet man auf Seite 123 die geodätische Linie Paris-Brest mit der Laplaceschen Gleichung:

$$-14,''83 = 1{,}335\,(\delta T_1 - \delta T_2) + \ldots .$$

δT_2 ist die Azimutverbesserung der geodätischen Linie in Brest, δT_1 die in Paris. Die der Rechnung zugrunde liegende Dreieckskette zieht sich u. a. 230 km weit in unmittelbarer Nähe der Kanalküste hin. Nimmt man an, dass zur Zeit der Winkelmessungen in dieser Gegend ein etwa nach Norden zu gehender Temperaturanstieg von 1^0 auf 4,2 km geherrscht hat, so gibt das eine Vektorkomponente $\mathfrak{R}_1 = \frac{10^4}{4200} = 2{,}4$ nach § 3 und eine Azimutdifferenz nach § 4 von

$$(\delta T_2 - \delta T_1)'' = \frac{+\varrho'' \,.\, 2{,}4 \,.\, 230000}{10^{10}} = +11,''4.$$

Als Verbesserung des Widerspruchs der Laplaceschen Gleichung erhält man damit:

$$+11{,}4 \,.\, 1{,}335 = +15''.$$

Ein Temperaturgefälle landeinwärts von 1^0 auf 4,2 km während der Tagesstunden der Messung im Bereich des an der Küste liegenden Teiles der Dreieckskette kann demnach den grossen Widerspruch der Laplaceschen Gleichung erklären. (Über die Möglichkeit solcher Temperaturgefälle an der See vergleiche man § 11 dieser Abhandlung.)

In der „Längengradmessung Heft II in 52^0 Breite“ hat die Laplacesche Gleichung zwischen Greenwich und Nieuport (Seite 64) — 12,''6 Widerspruch. Dass es sich hier um Refraktionsfehler handelt, ist um so wahrscheinlicher, als das zugrunde liegende englisch-französische Kanalnetz bereits durch das Auftreten gleicher Vorzeichen

in den Dreiecksschlussfehlern das Vorhandensein von Seitenrefraktion verrät, wie weiter oben gezeigt worden ist.

Der Widerspruch — 6,"38 in der geodätischen Linie Rauenberg-Springberg (Seite 109 des genannten Werkes) ist ebenfalls viel grösser, als die Messungsgenauigkeit an sich erwarten liesse.

Noch grössere Schlussfehler der Laplaceschen Gleichungen enthalten die russischen Linien, die in „Heft IV der Lotabweichungen" enthalten sind. Auch hier deuten die zugrunde gelegten Dreiecksketten auf Seitenrefraktion hin. In „Arc du Méridien etc." Seite 153 von F. G. W. Struve sind die Durchschnittswerte der Dreiecksschlussfehler zusammengestellt. Es geben in Bogensekunden:

l'arc Baltique	$+0{,}04$	$\pm 0{,}12$,
„ de Lithuanie	$-0{,}50$	$\pm 0{,}10$,
„ Volynie	$+0{,}39$	$\pm 0{,}13$,
„ Bessarabie	$+0{,}13$	$\pm 0{,}10$.

In Litauen und Wolhynien sind die Winkel nach dem Repetitionsverfahren, in den baltischen Provinzen und in Bessarabien mittelst Reïteration gemessen worden, und daraus schliesst Struve, dass die geringere Genauigkeit der Repetitionsmessungen die grossen mittleren Schlussfehler — 0,"59 und + 0,"39 erzeugt haben. Denkbar und plausibel wäre aber auch eine Erklärung dieser Schlussfehler durch Seitenrefraktion.

Leider sind gleichzeitige Temperatur- und Barometermessungen auf den Stationen zur Zeit der Winkelmessungen nicht gemacht worden, so dass man nach den Schlussfehlern der Laplaceschen Gleichungen immer nur Refraktion vermuten, aber nicht nachweisen kann.

Es wäre nun auch zu zeigen, dass kleine Refraktionsfelder vorhanden sind und zwar in grosser Anzahl. Ein Nachweis im einzelnen nach dem vorliegenden Material ist natürlich gänzlich ausgeschlossen; die kleinen Felder haben aber zur Refraktionsstreuung beigetragen, und diese kann aus den Ausgleichungsfehlern trigonometrischer Netze errechnet werden. In der Publikation des Geodätischen Instituts „Der Einfluss der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontwinkeln von Prof. A. Fischer" ist ein umfangreiches Material gesammelt. Es möge daraus nur die grösste Beobachtungsreihe entnommen werden: die Zusammenstellung von 1340 Richtungsverbesserungen in England.

Lfd. Nr.	Anzahl der Verbesserungen = A	Visurlängen in 10 km[1]) = s	Durchschnittliche Verbesserung = f
1	10	0,66	0,281"
2	68	1,56	0,558
3	145	2,54	0,680
4	149	3,49	0,842
5	153	4,54	0,756
6	142	5,48	0,778
7	120	6,56	0,968
8	116	7,55	1,156
9	97	8,47	1,053
10	77	9,50	0,968
11	65	10,50	1,276
12	51	11,50	1,040
13	51	12,53	1,534
14	41	13,41	1,160
15	20	14,47	1,393
16	19	15,38	1,836
17	5	16,64	0,948
18	11	17,44	1,560

Um zunächst roh entscheiden zu können, ob die zweifellos vorhandenen Refraktionsfehler aus grossen Refraktionsfeldern herstammen und der Länge der Visuren in erster Näherung proportional zu setzen sind oder ob sie den Charakter von Streuungen haben und dann der Quadratwurzel aus der Visurlänge proportional gehen, soll eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen und die Fehlergleichung

$$v = x \cdot s + y \sqrt{s} - f$$

allgemein angesetzt werden. Diese Fehlergleichung ist zwar nicht streng, u. a. ist der nackte Beobachtungsfehler als verschwindend klein neben der Refraktionsstreuung angenommen worden, auch wäre streng $f^2 + v = x s^2 + y s$ zu setzen; es kommt aber hier nur auf eine rohe Entscheidung an. Die Mitnahme des Gliedes $x s$ wäre zwar nach § 8 gar nicht nötig, weil grosse Felder nur mit kleinen Gliedern 2. Ordnung in f eingehen und deshalb sowieso kaum merkbar sind und überdies durch Fortlassung der zugehörigen Vektorrichtung bald mit positivem, bald mit negativem Vorzeichen eingehen, sich also zum Teil aufheben; weil aber Fischer den Refraktionseinfluss proportional der Visurlänge annimmt, so soll hier auch rechnerisch gezeigt werden, dass ein Glied $x \cdot s$ in den Richtungsverbesserungen praktisch nicht vorhanden ist. Nur die besonders günstigen Um-

[1]) Im Original Seite 65 muss es in den Überschriften zu den Tafeln offenbar 10 km statt km heissen.

Umstände: eine grosse Zahl (1340) Richtungsverbesserungen geordnet zusammengestellt zu finden, Visuren von allen denkbaren Längen darin zu haben und der Zufall, dass in den betreffenden Landesteilen eine überaus starke Refraktionsstreuung vorhanden gewesen ist, ermöglichen hier ausnahmsweise den Beweis dafür, dass man die aus Ausgleichungsfehlern errechneten Refraktionen (d. h. die Refraktionsstreuungen) allein der Quadratwurzel aus der Visurlänge proportional anzunehmen hat.

Fehlergleichungen.

x.s	+ y$\sqrt{s}$	— f	= v	
x . 0,66 +	y . 0,81	— 0,28″	= v_1	= + 0,05″
1,56	1,25	— 0,56	= v_2	= — 0,06
2,54	1,59	— 0,68	= v_3	= — 0,06
3,49	1,87	— 0,84	= v_4	= — 0,12
4,54	2,13	— 0,76	= v_5	= + 0,04
5,48	2,34	— 0,78	= v_6	= + 0,09
6,56	2,56	— 0,97	= v_7	= — 0,03
7,55	2,75	— 1,16	= v_8	= — 0,16
8,47	2,91	— 1,05	= v_9	= 0,00
9,50	3,08	— 0,97	= v_{10}	= + 0,13
10,50	3,24	— 1,28	= v_{11}	= — 0,13
11,50	3,39	— 1,04	= v_{12}	= + 0,15
12,53	3,54	— 1,53	= v_{13}	= — 0,29
13,41	3,66	— 1,16	= v_{14}	= + 0,11
14,47	3,80	— 1,39	= v_{15}	= — 0,08
15,38	3,92	— 1,84	= v_{16}	= — 0,50
16,64	4,08	— 0,95	= v_{17}	= + 0,42
17,44	4,18	— 1,56	= v_{18}	= — 0,15

Normalgleichungen mit Auflösung.

$$x\,1940 + y\,549{,}4 - 198{,}2 = 0$$
$$x\,549{,}4 + y\,162{,}2 - 58{,}9 = 0, \qquad [ff] = 22{,}14,$$
$$x = -0{,}02 \pm 0{,}02 \qquad [vv] = 0{,}67$$
$$y = +0{,}42 \pm 0{,}08, \qquad m = \pm\sqrt{\frac{0{,}67}{18-2}} = \pm 0{,}''20.$$

Also ist:

$$f = -0{,}02\,s + 0{,}42\,\sqrt{s}.$$

Die Proportionalität der Refraktionsverbesserungen mit der Quadratwurzel aus der Länge der Visuren ist so deutlich ausgesprochen, dass, im Gegensatz zu Fischer, an ihrer Richtigkeit nicht zu zweifeln ist.

Nunmehr ist eine strengere Ausgleichung zu machen, um den eigentlichen (nackten) Messungsfehler, er möge z genannt werden,

von der Refraktionsstreuung y zu trennen. Die Fehlertheorie fordert $f^2 = z^2 + y^2 s$. [Fischer hat das übliche Gesetz der Fehlerzusammensetzung in diesem Falle nicht befolgt und $dr = a + eb$ geschrieben, was identisch mit der hier angewandten Schreibweise $f = z + sy$ ist.] Man erhält die

Fehlergleichungen.

$1 . z^2 +$	$s . y^2$	$- f^2$	$= v$
$1 . z^2 +$	$0{,}66\, y^2$	$- 0{,}08$	$= v_1$
1 +	1,56	− 0,31	$= v_2$
1 +	2,54	− 0,46	$= v_3$
1 +	3,49	− 0,71	$= v_4$
1 +	4,54	− 0,57	$= v_5$
1 +	5,48	− 0,61	$= v_6$
1 +	6,56	− 0,94	$= v_7$
1 +	7,55	− 1,34	$= v_8$
1 +	8,47	− 1,11	$= v_9$
1 +	9,50	− 0,94	$= v_{10}$
1 +	10,50	− 1,63	$= v_{11}$
1 +	11,50	− 1,08	$= v_{12}$
1 +	12,53	− 2,35	$= v_{13}$
1 +	13,41	− 1,35	$= v_{14}$
1 +	14,47	− 1,94	$= v_{15}$
1 +	15,38	− 3,37	$= v_{16}$
1 +	16,64	− 0,90	$= v_{17}$
1 +	17,44	− 2,43	$= v_{18}$

Normalgleichungen mit Auflösung:

$$18\, z^2 + 162{,}2\, y^2 - 22{,}1 = 0$$
$$162{,}2\, z^2 + 1940\, y^2 - 259 = 0, \qquad [f^2 f^2] = 39{,}3$$
$$\Delta\varphi^2 = y^2 = + 0{,}13, \qquad z^2 = + 0{,}06.$$

Die Quadratsumme der Messungsfehler ist $[f f] = 22{,}1$,
und hierzu ist der Beitrag
des reinen Messungsfehlers z: $0{,}06 . 18 = 1{,}1$,
der Refraktionsstreuung y: $0{,}13 . 162{,}2 = 21{,}1$
$[f f] = 22{,}2.$

Das überraschende Resultat, das von dem Fischers ganz und gar abweicht, verdient wohl eine nochmalige strenge Rechnung mit Gewichten.

Das Absolutglied f^2 wird durch die obige Ausgleichung näherungsweise dargestellt durch $0{,}06 + 0{,}13\, s$. Dies ist das mittlere Fehlerquadrat einer Messung. Ist die Zahl der Messungen A, welche zum Mittel f vereinigt sind, so wird man das Gewicht einer Fehlergleichung proportional $\frac{A}{0.06 + 0{,}13\, s}$ anzusetzen haben, etwa

$p = \frac{A}{6 + 13\,s}$. Diese Überlegungen sind nicht ganz einwandfrei; man wird aber immerhin die so errechneten Gewichte p als ausreichende Näherungen gelten lassen können. Man erhält:

$p_1 = 0{,}7$	$p_7 = 1{,}2$	$p_{13} = 0{,}3$
$p_2 = 2{,}6$	$p_8 = 1{,}1$	$p_{14} = 0{,}2$
$p_3 = 3{,}7$	$p_9 = 0{,}8$	$p_{15} = 0{,}1$
$p_4 = 2{,}9$	$p_{10} = 0{,}6$	$p_{16} = 0{,}1$
$p_5 = 2{,}4$	$p_{11} = 0{,}5$	$p_{17} = 0{,}0$
$p_6 = 1{,}8$	$p_{12} = 0{,}3$	$p_{18} = 0{,}0.$

Normalgleichungen mit Auflösung:

$$19{,}3\,z^2 + 91{,}7\,y^2 - 13{,}79 = 0$$

$$91{,}7\,z^2 + 617{,}8\,y^2 - 89{,}16 = 0, \qquad [pf^2\,f^2] = 13{,}71$$

$$z^2 = +\,0{,}098 \pm 0{,}092 \qquad [pvv] = 0{,}80$$

$$\Delta\varphi^2 = y^2 = +\,0{,}129 \pm 0{,}016, \qquad m = \sqrt{\frac{0{,}80}{16}} = 0{,}22 \text{ für } p = 1.$$

Der nackte Messungsfehler ist daher $z = \pm(0{,}''31 \pm 0{,}''15)$ und die Refraktionsstreuung y bezw. $y\sqrt{s} = \pm(0{,}''36 \pm 0{,}''02)\sqrt{s}$ für s in 10 km Einheiten. Also bereits bei 8 km Visurlänge überwiegt der Refraktionsfehler! Fischer gibt (auf Grund desselben Beobachtungsmaterials) den nackten Messungsfehler zu 0,"6, den Refraktionsfehler zu 0,"06s an.

Im Fischerschen Werk sind auch eine Anzahl Fälle angegeben, die das Vorhandensein der Refraktion in einzelnen Visuren zeigen. Die stärkste Refraktion ergab sich auf der Station Horningsgründe. Die Messungen der Richtung Durlach (gegen eine feste Nullmarke?) am 22. Juli und 7. August 1875 wiesen einen Unterschied von 6,"63 auf.

Über Seitenrefraktion bemerkt schon v. Lamont 1865 in den Sitzungsberichten der bayerischen Akademie, Heft 1 das minutenlange periodische Schwanken bis zu 10".

Auch Baeyer sagt im „Generalbericht über den Stand der mitteleuropäischen Gradmessung pro 1863" Seite 36 u. a.: „Das Schwanken nach jeder Seite mochte 6 bis 8 Sekunden betragen und dauerte nach jeder Seite hin immer 6 bis 8 Minuten."

In ähnlicher Weise spricht sich Ferrero in der dritten Sitzung der „Permanenten Kommission der europäischen Erd-

messung" 1878 zu Hamburg aus über die Winkelmessungen zur Festlegung der 10 km langen Grundlinie bei Somma: „Bei der Visierung von einem Endpunkt nach dem andern hat man in der Richtung stets einen Unterschied von 5″ gegen die Nachtbeobachtungen gefunden, sobald während der Beobachtungen der Wald von der Sonne so beleuchtet war, dass er seinen Schatten auf die Grundlinie warf." Hier muss der Refraktionsvektor also die Grösse 50 erreicht haben.

Im 8. Band der Veröffentlichung „Das Schweizerische Dreiecksnetz" bringt Messerschmitt auf Seite 169—175 mehrere Beispiele von Seitenrefraktion. Es ist zu bedauern, dass diese interessanten Fälle durch eine grössere Anzahl von Temperaturaufzeichnungen an mehreren Orten, besonders zur Zeit der Föhnwirkung nicht genauer studiert worden sind.

Refraktionsfehler äussern sich auch durch die allgemeine Erhöhung des mittleren Fehlers nach Erfüllung der Netzbedingungsgleichungen. Findet man aus den Stationsausgleichungen den mittleren Richtungsfehler μ_1, aus den Dreiecksschlüssen μ_2, aus den Seitengleichungen μ_3 und aus der Netzausgleichung μ_4, so liefern beispielsweise die preussischen Triangulierungen im allgemeinen $\mu_4 : \mu_1 = 1{,}7 : 1$. Wenn die Vergrösserung nur auf Refraktion zu schieben ist, so muss der Messungsfehler μ_1 allein sich zur Refraktionstreuung verhalten wie $1 : \sqrt{1{,}7^2 - 1} = 1 : 1{,}4$. (In „Jordan, Vermessungskunde Band I" findet man bei Besprechung der Triangulierungen weitere Angaben über das Verhältnis $\mu_1 : \mu_4$ oder $\mu_1 : \mu_2$, wie es Jordan nennt.) Es kommt indes noch ein anderer merkwürdiger Umstand hinzu: man findet im allgemeinen, dass die Triangulierungen $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$ geben. Auf die ungünstigen Schlüsse der Seitenbedingungsgleichungen hat Helmert in der „Europäischen Längengradmessung in 52° Breite", Band I hingewiesen. (Vergl. dort Seite 18, 86, 121, 136.) Es wäre vielleicht der Mühe wert, aus einer grossen Anzahl von Bedingungen das numerische Verhältnis etwa zwischen μ_2 und μ_3 genauer festzustellen, um so mehr, als μ_3 selten berechnet wird. Vom Standpunkt der Refraktionstheorie aus müsste man erwarten, dass μ_3 am wenigsten von μ_1 abwiche, weil nur für die an der Grenze der Kleinheit liegenden Refraktionsfelder der Einfluss auf Winkel- und Seitengleichungen als gleich angenommen werden kann, während die Seitengleichungen mit steigender Grösse der Refraktionsgebiete für bekannte Refraktionsursachen nur verschwindend wenig gestört werden.

Nur in dem Falle, dass es noch einen starken solenoidalen Refraktionsvektor gibt (d. h. der kein Potential hat, der die Rotation eines andern Vektors darstellt), ist es denkbar, dass die Ungleichheiten $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$ von Refraktion allein herrühren.

§ 15. Kritische Betrachtungen über einige bisherige Arbeiten.

„Historische Notizen über die Lateralrefraktion" gibt Günther in der Sitzung der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen am 11. Mai 1874. Nach ihm ist Eimmart, ein Nürnberger Astronom, der erste, der (1701) die Seitenrefraktion erwähnt. „Merkwürdigerweise vergehen aber nunmehr nicht weniger als 138 Jahre, bis auf dasselbe (das Phänomen der seitlichen Strahlenbrechung) wieder hingewiesen wird."

Auch in der Publikation des geodätischen Instituts: „Der Einfluss der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontwinkeln" von Fischer ist eine historische Übersicht enthalten. Weiter enthält diese Veröffentlichung das Beobachtungsmaterial einer Anzahl Geodäten, das zum Studium der Seitenrefraktion ausgeführt worden ist. Es mögen dazu einige Bemerkungen gemacht werden.

W. Struve hält es für das naturgemässeste, die Seitenrefraktion der Quadratwurzel aus der Entfernung proportional zu setzen; aus seinen Rechnungen aber folgert er, dass sich diese Hypothese nicht mit den Beobachtungen vereinigen lasse. Man muss indes hinzufügen, dass Struve seine Untersuchungen nur auf 31 Dreiecke gründet, also auf eine Zahl, die bei weitem nicht ausreicht, eine solche Frage richtig zu beantworten. (Vergl. auch die Bemerkungen über die russischen Dreiecksketten im vorigen §.)

Fr. Pfaff hat längere Beobachtungsreihen zur Ermittlung der Seitenrefraktion ausgeführt. Die Winkelfehler zwischen den Objekten schwanken bis zu 18″. Man darf aber diese Messungen nicht als Beweis für das Vorhandensein von Seitenrefraktionen gelten lassen. Pfaff hat nämlich im Turm seines Hauses beobachtet, „die Fenster nach Nord und Ost geöffnet und in die Fensteröffnungen geschwärzte und mit schwarzem Pappendeckel überzogene Rahmen gestellt, welche vollkommen schlossen und nur einen ca. 4 cm grossen Ausschnitt hatten, wodurch man nach den resp. Objekten visierte". Beobachtet wurde zwischen den Temperaturen -11^0 und $+28^0$. Es ist wohl zweifellos, dass unter solchen Umständen die Zimmerrefraktion einen sehr wesentlichen Beitrag zu den Winkelunterschieden geliefert

hat. Auch die Anvisierung von Objekten ohne Lichtsignale (Heliotrope etc.) bietet erfahrungsgemäss Ursache zu systematischen Zielfehlern, die hier in der vermuteten Seitenrefraktion versteckt sind.

Luvini konstruierte einen Apparat, „Diteroskop" genannt, zur Bestimmung von Höhen- und Seitenrefraktion. Hält man einen Vorstecktubus zu einem astronomischen Fernrohr (durch den das verkehrte Bild wieder aufgerichtet wird) so vor das Fernrohr, dass man neben dem aufgerichteten Bilde auch noch (durch Lichtstrahlen, die neben dem Vorstecktubus vorbei ins Fernrohr gelangen) das umgekehrte Bild sieht, so ist damit im wesentlichen das Diteroskop nachgeahmt. Mit Hilfe einer Mikrometerschraube wurde der Unterschied zwischen dem aufrechtstehenden und dem verkehrten Bilde eines Objektes gemessen. Eine Änderung der Richtung würde ein Verschieben beider Bilder im entgegengesetzten Sinn hervorbringen. Die mitgeteilten Beobachtungsreihen zeigen auch ganz ausgeprägte, tägliche Gänge. Ein direkter Zusammenhang der Winkeländerungen mit den gegebenen Temperaturen ist allerdings nicht nachweisbar. Höhen- wie Horizontalwinkel schwanken um etwa 5" bis 10". Fischer gibt mehrere Einwendungen an, die Luvini gegen die Gültigkeit seines Messverfahrens gemacht worden sind. Die eine Einwendung gibt wohl den wahren Grund für die beobachteten Schwankungen, nämlich, dass die beobachtete Variation von der Aufstellung des Instrumentes und nicht von der Refraktion abhängt. Luvini hat allerdings seinen Apparat zuweilen $^1/_2$ Stunde von der Sonne bescheinen lassen und während dieser Zeit konstatiert, dass ein Sprung (der Bilder) niemals stattgefunden hat. Aber daraus allein kann man nicht den Schluss ziehen, dass keine Instrumentalfehler vorhanden sind! Den Apparat Luvinis kann ich nun zwar nicht nachprüfen, aber es lässt sich an einer ähnlichen Messung zeigen, bis zu welcher Grösse die Instrumentalfehler bisweilen gehen können. Visiert man mit einem Theodoliten fortgesetzt in nur einer Fernrohrlage ein Objekt an, so ist das Messverfahren Luvinis ungefähr nachgeahmt. (Luvini misst den Unterschied zwischen aufrechtstehendem und umgekehrtem Bild, wodurch er den doppelten Winkelwert erhält.) An einem grossen Repsoldschen Theodoliten, einem sicher als erstklassig geltenden Instrument, habe ich beispielsweise am 23. März 1910 folgende Beobachtungsreihe auf dem Turm des Geodätischen Institutes zwischen den 2 bezw. 7 km entfernten Miren erhalten. Mit Ausnahme der eingeklammerten Werte ist jede Zahl das Mittel aus fünf Einstellungen bezw. 20 Mikrometerablesungen.

Zeit	Instrument-temperatur	Objekt-Mire Nedlitz 1. Fernrohrlage	Nedlitz 2. Fernrohrlage	Objekt-Mire Ravensberg 1. Fernrohrlage	Ravensberg 2. Fernrohrlage	Endgültiger Winkelwert
6h 15m a	— 0,2 ° C	56,75″	35,41″	84,35″	63,43″	180°0′ 27,8″
46	+ 0,1	54,91	34,71	84,19	62,77	28,7
7 26	+ 0,6	54,52	—	—	62,82	(29,1)
10 24	+ 5,4	51,64	32,95	81,57	62,48	29,7
11 16	+ 6,6	51,72	33,82	81,06	62,80	29,2
1 32 p	+ 8,4	49,98	36,17	78,64	65,29	28,9
2 24	+ 8,6	50,14	(35,05)	(78,73)	65,75	29,6

Wollte man so verfahren, wie es Luvini tat, d. h. wollte man das Fernrohr unausgesetzt auf ein Objekt richten und dessen scheinbare Verschiebungen messen, so käme man zu „Refraktionsfehlern", die der Temperatur sehr schön proportional gingen und nahezu 7″ erreichten, während die tatsächlichen Winkeländerungen, soweit sie der Refraktion zuzuschreiben sein dürften, höchstens 2″ betragen. Die Arbeiten Luvinis darf man daher für das Vorhandensein der Strahlenbrechung nicht als beweisfähig betrachten.

C. M. v. Bauernfeind hat in den Jahren 1877—1878 neben Untersuchungen über Höhenrefraktion auch eine Anzahl Messungen zur Bestimmung der Seitenrefraktion gemacht. Bauernfeind hält indes die beiden Okularmikrometer nicht für fehlerfrei und nimmt an, dass sie sich um eine zur Sehrichtung parallele Achse haben drehen können. Mit dieser Annahme stellt Bauernfeind die Beobachtungen allerdings gut dar und schliesst daraus, zugleich allgemein, dass der Einfluss der Seitenrefraktion nur sehr selten von Belang ist. Die Annahme einer Seitenrefraktion proportional der Entfernung würde seine Beobachtungen aber ebensogut darstellen, wie Fischer zeigt. Jedenfalls bleibt es zweifelhaft, ob die Bauernfeindschen Beobachtungen für oder gegen eine Seitenrefraktion sprechen. Noch auf einen Umstand möge hingewiesen werden, der sehr leicht die zweifellos sorgfältigen Beobachtungen hätte stören können: die Signalisierung geschah des Nachts mittelst Petroleumlampen mit einfachen Rundbrennern und mit Metallreflektoren von 34 cm Durchmesser. Berücksichtigt man die Entfernungen der Zielstationen: 16,8, 28,7, 48,0 km, so erscheinen die Signale in hellen Scheiben von bezw. 4,″2, 2,″4, 1,″5 Durchmesser. Nur durch sorgfältigste, sachgemässe Bedienung der Lampen kann man in solchen Fällen verhüten, dass die Helligkeit der Reflektoren auf einer Hälfte

grösser ist als auf der anderen. Man begibt sich mit derartigen Signalen in die Gefahr, unkontrollierbare, systematische Zielfehler zu begehen, die leicht $\pm 1,''0$ erreichen.

Fischer selbst hat in seiner Abhandlung eine Anzahl interessanter Angaben über Seitenrefraktion gemacht. Auffallend sind namentlich seine Mitteilungen über Winkelmessungen zu verschiedenen Zeiten. Wertvoll sind auch die Zusammenstellungen von Ausgleichungsfehlern, geordnet nach Visurlängen. Das Wesentliche hierüber ist schon im vorigen Paragraphen gesagt.

Helmert hat in Band 2 Seite 564 der „Theorie der höheren Geodäsie" die regelmässige Lateralrefraktion im Anschluss an die Höhenrefraktion behandelt. Der Gedankengang ist etwa dieser: Die Schmiegungsebene eines Lichtstrahles steht senkrecht auf der Niveaufläche. Da nun die Niveauflächen von der Kugelgestalt infolge der Erdabplattung etwas abweichen, so wird die Krümmung der Lichtkurve auch noch eine kleine Windung zeigen, die eine regelmässige Seitenrefraktion darstellt. Für eine horizontale Visur sind Windung und Krümmung des Lichtweges in erster Näherung denen einer geodätischen Linie proportional. Man kann daraus ermessen, dass sich die regelmässige Seitenrefraktion zur Höhenrefraktion verhält, wie die horizontale Abweichung der geodätischen Linie vom Normalschnitt zur Krümmung der geodätischen Linie. Helmert drückt das so aus: „Die regelmässige Lateralrefraktion eines Lichtstrahles, welcher von einem Punkte P_2 nach einem Punkt P_1 geht, ist in P_1 gleich dem Produkt aus dem Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimutes für das Objekt P_2 (abgesehen darin von dem Einfluss der Höhenlage desselben über dem Standpunkt P_1) in den Refraktionskoeffizienten". Einen messbaren Betrag erreicht die regelmässige Seitenrefraktion nicht.

Pizzetti behandelt in zwei Schriften denselben Gegenstand und verfolgt mathematisch streng den Weg des Lichtstrahles bei verschiedenen, rein theoretisch angenommenen Dichteanordnungen der Luft. Seine mathematischen und flächentheoretischen Ausführungen sind zwar recht interessant, der Praktiker wird aber schwerlich Nutzen daraus ziehen können.

Jordan gibt im „Handbuch der Vermessungskunde", Band III (3. Aufl., Seite 156 u. f.) eine „Theorie der Seitenrefraktion". Die Luftdichte wird ϱ genannt und $\frac{d\varrho}{dy}$ ist ihre Änderung quer zum Lichtstrahl. Aus der Krümmung einer kreisförmigen Lichtbahn mit

dem Längenelement dx: $\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dx}$ findet Jordan:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\varrho}{dy}\sin^2\varphi.$$

α ist die „Refraktionskonstante". Die Einführung des Barometerstandes B und der Temperatur t führt zu der Gesamtkrümmung in Bogensekunden: $\Delta\varphi = 0{,}08\frac{dB}{dS}x - 0{,}22\frac{dt}{dS}x$, wenn x die Länge des Lichtstrahles und dS ein Längenelement senkrecht zu diesem ist. Da der Winkel $\delta\varphi_{12}$, den die Tangente an die Lichtkurve in ihrem Anfangspunkt P_1 mit der Sehne des Kurvenbogens einschliesst, halb so gross ist, als der Zentriwinkel des Bogens, so müsste der Jordansche Ausdruck $\Delta\varphi$ zu der Refraktionsverbesserung $\delta\varphi$ in der Beziehung $\Delta\varphi = 2\,\delta\varphi_{12}''$ stehen. Wird von $\delta\varphi_{12}$ (§ 6) lediglich das homogene Feld in Betracht gezogen und darin $\mathfrak{R}_1 = -\mathfrak{R}_x \sin\varphi_{12} + \mathfrak{R}_y \cos\varphi_{12}$ eingeführt und schiesslich $dT = dt$ und $T = 273^0 + t$ gesetzt, so stimmt in der Tat die von Jordan angegebene Krümmung mit der doppelten Refraktionsverbesserung $\delta\varphi$ der absoluten Grösse nach überein. Die Refraktionskonstante α ist gegeben durch $\varrho''\ 0{,}000294\frac{B}{760}\frac{273}{T}$ oder in Jordanscher Darstellung:

$$\alpha = 60{,}361''\frac{B}{760}\frac{273}{1+\varepsilon t}.$$

Es mag hier eine allgemeine Bemerkung über den Zusammenhang des Brechungskoeffizienten mit der Luftdichte Platz finden. Ist n der Brechungskoeffizient und ϱ die Luftdichte, c eine Konstante, so setzen Jordan, Bauernfeind und andere $n^2 - 1 = c\varrho$. Helmert hat in seiner höheren Geodäsie $n - 1 = c\varrho$ gesetzt. Aus der neueren Elektrizitätslehre findet man $\frac{n^2-1}{n^2+2} = c\varrho$. Näheres ist in „M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Band II, Elektromagnetische Theorie der Strahlung", Leipzig 1905, Seite 272, enthalten. Im Grunde genommen ist es für die Refraktion überhaupt praktisch gleichgültig, welches der drei Gesetze zwischen Brechungsindex und Luftdichte angenommen wird. Man kann, wie dies in § 3 geschehen, $n = 1 + \nu$ setzen, in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ν entwickeln und die Reihe mit dem ersten Gliede abbrechen. Die Reihenentwickelung führt jedenfalls immer zu der einfachen und praktisch voll ausreichenden Helmertschen Annahme $\nu = n - 1 = c\varrho$.

Lebenslauf.

Ich, Karl Gustav Förster, evangelischer Konfession, bin am 5. März 1873 als jüngster Sohn des Mühlenbesitzers Traugott Förster zu Michelsdorf, Kreis Waldenburg, geboren. Vom 6. bis 14. Lebensjahre besuchte ich die Elementarschule im Geburtsorte. Dann fand ich als Schreibgehilfe im Katasteramt Schweidnitz Beschäftigung. Nach wiederholtem Stellungswechsel, und nachdem ich mich in den Mussestunden mit der Geodäsie näher bekannt gemacht hatte, war ich u. a. längere Zeit als Geometer bei den Neumessungsarbeiten der Landbank Berlin und bei dem Schwebebahnbau in Barmen tätig.

Mein schon lange gehegter Wunsch, die höhere Schulbildung nachzuholen, um Vorlesungen an der Universität hören zu können, ging endlich in Erfüllung, nachdem der Direktor des Geodätischen Instituts, Herr Geheimrat Professor Dr. Helmert, mir im November 1901 eine Stellung als Rechner im Geodätischen Institute freundlichst gewährte. Ich fand neben meinem Dienst nunmehr hinreichend Zeit, um mich für die Reifeprüfung an einer Oberrealschule vorzubereiten. Nach dreijährigem Studium erwarb ich mir zunächst das Reifezeugnis an der VII. Realschule zu Berlin, und zwei Jahre später bestand ich das Abiturientenexamen an der Oberrealschule zu Charlottenburg.

Im Januar desselben Jahres (1906) war ich bereits als wissenschaftlicher Hilfsarbeiter am Geodätischen Institut angestellt worden.

Nach Erlangung des Reifezeugnisses widmete ich mich vorzugsweise dem Studium der Geodäsie und der Physik; auch hörte ich mehrere Vorlesungen über Geophysik, Mathematik, Astronomie und

Philosophie. Meine akademische Ausbildung danke ich hauptsächlich den Herren Professoren: Blasius, Frobenius, Helmert, Knoblauch, Planck, Riehl, Rubens, Ad. Schmidt, Struve und Wehnelt. Ferner bin ich dem Abteilungsvorsteher am Geodätischen Institut, Herrn Professor Dr. Kühnen, für seine vielfachen und bereitwilligen Belehrungen dankbar. Ganz besonders aber habe ich Herrn Geheimrat Professor Dr. Helmert dafür zu danken, dass meine ganze akademische Ausbildung durch seine gütige Unterstützung überhaupt erst möglich gemacht wurde, sowie ferner für das feste, unwandelbare Vertrauen, das Herr Geheimrat Helmert im Laufe meiner zehnjährigen Ausbildung in den guten Fortgang meines Studiums gesetzt hat.

Am 6. Juli 1911 bestand ich die Promotionsprüfung.